ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие………………………………………………7
ЧАСТЬ I Обыкновенные дифференциальные уравнения
Вводная глава…..……………………………….…8
§1.Понятие дифференциального уравнения………
§2.Математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями……………….11
§3.Решение простейших типов дифференциальных уравнений……………………………………….15
§4.Уравнение в полных дифференциалах. Общий интеграл уравнения…………………………...….18
§5.Интегрирующий множитель……………………..22
Глава I Задача Коши для уравнения первого порядка.
§6.Сведение задачи Коши к интегральному уравнению. Лемма Гронуолла-Беллмана……………………..32
§7.Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения, разрешенного относительно производной……...……………….36
§8.Дифференциальное уравнение первого порядка, неразрешенного относительно производной Теорема существования и единственности решения…………………………………………...….44
§9. Особые решения уравнения первого порядка, неразрешенного относительно производной…….54
Глава II Системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
§10.Задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений……………………62
§11.Сведение задачи Коши для нормальной системы к системе интегральных уравнений. Теорема единственности решения……………………….65

§12.Теорема существования решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений……………………………………………70
§13.Непрерывность решений дифференциальных уравнений по начальным данным и параметрам..75
§14.Регулярное и сингулярное возмущения системы дифференциальных уравнений…………………..78
Глава III Линейные дифференциальные уравнения.
§15.Линейное дифференциальное уравнение и его свойства……………………………………………86
§16.Общая теория линейных однородных уравнений n-го порядка……………………………………..90
§17.Решение неоднородного уравнения……………...95
§18.Восстановление дифференциального уравнения по известной фундаментальной системе решений. Формула Остроградского- Лиувилля…………….99
§19.Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение………………103
§20.Восстановление дифференциального уравнения по корням характеристического уравнения……...110
§21.Теория линейных систем дифференциальных уравнений……………………………………………112
§22.Фундаментальная система решений и решение неоднородной линейной системы дифференциальных уравнений…………………118
§23.Построение фундаментальной системы решений для системы уравнений с постоянными коэффициентами………………………………….123
Глава IV Теория устойчивости решения дифференциального уравнения.
§24.Основные понятия теории устойчивости. Устойчивость решения линейной системы…….134

§25.Исследование устойчивости решения автономной системы……………………………142
§26.Исследование устойчивости решения методом функций Ляпунова……………………………..154
Глава V Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка.
§27.Линейные уравнения в частных производных первого порядка………………………………..164
§28.Квазилинейные уравнения для частных производных первого порядка…………………173
ЧАСТЬ II Краевые задачи и вариационное исчисление.
Глава VI Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений
§29.Постановка краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений………………..180
§30.Формула Грина. Построение решения краевой задачи с помощью функции Грина…………....186
§31.Существование и единственность функции Грина..191
§32.Постановка краевой задачи при существовании решения однородной задачи……………………194
§33.Обобщенная функция Грина и представление решения неоднородной задачи, если существует решение однородной задачи…………………....198
§34.Поведение решения краевой задачи в окрестности $x = 0$, если $p(x = 0) = 0$.…………………………210
§35.Построение решения дифференциального уравнения в виде степенных рядов. Уравнение Бесселя………………………………..216
Глава VII Задачи на собственные значения дифференциальных уравнений.
§36.Задача Штурма – Лиувилля и ее свойства………220

§37.Редукция задачи Штурма-Лиувилля к
интегральному уравнению……………………225
§38.Решение неоднородного интегрального уравнения
с симметричным ядром. Теорема Стеклова……231
§39.Задачи на собственные значения для уравнения с
постоянными коэффициентами…………………235
§40.Собственные функции краевой задачи для
уравнения Бесселя………………………………..238
Глава VIII Вариационное исчисление.
§41.Понятие функционала и вариации.
Постановка вариационной задачи.
Необходимое условие экстремума………………242
§42.Основная лемма вариационного исчисления.
Уравнения Эйлера………………………………..248
§43.Функционалы, содержащие производные порядка
выше первого.
Необходимые условия экстремума……………..252
§44.Функционалы от нескольких функций.
Необходимые условия экстремума…………….257
§45.Вариационные задачи на условный экстремум.
Метод неопределенных множителей Лагранжа..261
§46.Задачи на условный экстремум при
неголономных связях…………………………..268
§47.Изопериметрические вариационные задачи…….273
§48.Многомерные вариационные задачи.
Уравнение Эйлера-Остроградского……………..277

Предисловие

Настоящая книга посвящена курсу дифференциальных уравнений. Это годовой курс, читаемый на факультете ВМК МГУ. Курс четко разделен на две части:

1) теория обыкновенных дифференциальных уравнений;
2) краевые задачи и вариационное исчисление.

В первой части рассматриваются задача с начальными данными, теоремы существования и единственности решения, особые решения, общая теория линейных систем дифференциальных уравнений, теория устойчивости.

Вторая часть курса содержит теорию краевых задач и задач на собственные значения для самосопряженного дифференциального оператора второго порядка, а также методы решения линейных и квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка. Кроме этого, рассматриваются задачи вариационного исчисления.

Первая часть книги состоит из шести глав, а вторая - из трех глав. Главы делятся на параграфы. В конце каждой главы даны задачи по тематике главы.

Книга рассчитана на студентов, обучающихся по специальности «Прикладная математика и информатика». Она также может быть использована как учебное пособие по курсам, посвященным обыкновенным дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению.

ЧАСТЬ 1
Обыкновенные дифференциальные уравнения

Вводная глава.

§1. Понятие дифференциального уравнения

При построении математической модели некоторого временного процесса $u(t)$ обычно на основе экспериментальных закономерностей описывают связь между процессом и его производными.

Дифференциальным уравнением называется соотношение между функциями и их производными. Если функция зависит от одной переменной, то получаем обыкновенное дифференциальное уравнение. Если функция зависит от нескольких переменных, то получим дифференциальное уравнение в частных производных. Наш курс посвящен исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений. Обыкновенные дифференциальные уравнения являются основой математического моделирования процессов, зависящих от одной переменной

Определение 1.1 Пусть на отрезке [0,T] определена n раз дифференциальная функция $y(t)$ и ее производные $y'(t),\ldots y^{(n)}(t)$. Переменные $t, y, y', \ldots, y^{(n)}$ образуют *(n+2)*-мерное пространство. Если в области $D \in R_{n+2}$ определена функция $F(t, y, y', \ldots, y^{(n)})$, то соотношение

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1.1)$$

называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка***.

Определение 1.2 ***Решением обыкновенного дифференциального уравнения*** (1.1) называется n-раз дифференцируемая функция $y(t)$, заданная на [0,T] и обращающая соотношение (1.1) в тождество.
Порядком уравнения называется порядок старшей производной в (1.1).

Определение 1.3 ***Уравнением, разрешенным относительно старшей производной***, называется уравнение вида

$$y^{(n)}(t) = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (1.2)$$

Если изучается несколько процессов $y_m(t), m \in [1,n]$, связанных между собой, то строится система дифференциальных уравнений для векторной функции

$$\bar{y}(t) = \{y_m(t)\};$$

$$F_m(t, \bar{y}, \bar{y}', ..., \bar{y}^{(n)}) = 0, m \in [1,n] \qquad (1.3)$$

Если разрешить F_m относительно $\bar{y}^{(n)}(t)$, то получим систему дифференциальных уравнений разрешенных относительно старшей производной:

$$y_m{}^{(n)}(t) = f_m(t, \bar{y}, \bar{y}', ..., \bar{y}^{(n-1)});\ m \in [1,n] \qquad (1.4)$$

Обычно рассматривают систему первого порядка, разрешенную относительно производной:

$$\frac{dy_m}{dt} = f_m(t, y_1, \ldots, y_n)\ ; \qquad m=1,2,\ldots,n \qquad (1.5)$$

Такая система называется ***нормальной системой*** дифференциальных уравнений. Система (1.4) всегда может быть сведена к системе (1.5).

Определение 1.4 ***Решением системы*** (1.5) называют совокупность дифференцируемых функций $y_1,\dots,y_n$, определенных на отрезке [0,T], которые при подстановке в (1.5) обращают их в тождество.

При моделировании реальных процессов функции f_m могут быть как непрерывными, так и разрывными. В нашем курсе мы будем считать f_m непрерывными функциями. Процесс нахождения решения называется ***интегрированием дифференциального уравнения.***

Задача для дифференциального уравнения или системы состоит из уравнения (или системы) и дополнительных условий, которые должны обеспечить существование и единственность решения этой задачи. Рассмотрим из общих соображений, какие условия необходимо задать. Пусть уравнение задано на отрезке $t\in\ t_0,t_0+T$. Если в системе (1.5) задать в начальной точке $t=t_0$ значения искомых функций

$$y_m(t_0)=y_m^0, m\in[1,n], \tag{1.6}$$

то в начальной точке, согласно (1.5), мы можем определить производные функций

$$y'_m(t_0)=f_m(t_0,y_1^0,y_2^0,\dots,y_n^0)\,. \tag{1.7}$$

Это означает, что в малой окрестности начальной точки мы можем определить $\overline{y}(t)$.Таким образом, задача определения решения нормальной системы дифференциальных уравнений ставится как нахождение вектор-функции $\overline{y}(t)$, удовлетворяющей системе (1.5) и начальным условиям (1.6).

Аналогично ставится задача и для уравнения, разрешенного относительно старшей производной (1.2).

Только в этом случае в начальной точке должны быть заданы значения функции и (n-1)-ой ее производной

$$y(t_0) = y_0; y'(t_0) = y'_0; ...; y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (1.8)$$

Условия (1.8) позволяют определить $y^{(n)}(t_0)$, согласно (1.2), и, следовательно, определить решение уравнения (1.2).

Поставленные задачи называются задачами с начальными условиями или задачами Коши. Конечно, определение решения зависит от свойств функций $f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ и $f_m(t, \bar{y}), m \in [1, n]$. В дальнейшем мы должны определить, при каких условиях на f и f_m решения задачи Коши существует, единственно и непрерывно зависит от параметров задачи.

§2.Математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями.

С помощью задач Коши обычно моделируют развитие временных процессов. В этом случае математическая модель описывает связь между $y(t)$, скоростью $y'(t)$ и ускорением $y''(t)$ процесса в виде:

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$$

или более простая модель, связывающая $y(t)$ со скоростью $y'(t)$, в виде:

$$y'(t) = f(t, y(t)).$$

Если мы имеем несколько процессов модели $\bar{y}(t) = \ y_1(t), \ldots, y_n(t)$, связанных между собой и со скоростью $\overline{y'}(t)$ и ускорением $\overline{y''}(t)$ их изменения, то имеем системы дифференциальных уравнений в виде:

$$\overline{y''}(t) = \overline{F}(t, \overline{y}, \overline{y'})$$

или, если связанны $\overline{y}(t)$ и $\overline{y'}(t)$,

$$\overline{y'}(t) = \overline{F}(t, \overline{y})$$

Рассмотрим несколько моделей временных процессов.

1. Радиоактивный распад

Пусть $m(t)$ — масса распадающегося вещества. Количество распавшегося вещества Δm за время Δt пропорционально количеству вещества $m(t)$ и интервалу времени Δt, т.е. $\Delta m = -\alpha\ m(t)\Delta t$.

При $\Delta t \to 0$ имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha\, m(t).$$

Решением этого дифференциального уравнения является функция $m(t) = Ce^{-\alpha t}$. Если нам известно дополнительно условие $m(t = t_0) = m_0$, то получаем задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} = -\alpha\, m(t) \quad t \in [t_0, t_0 + T], \\ m(t_0) = m_0\ . \end{cases} \tag{2.1}$$

Решение этой задачи имеет вид $m(t) = m_0 e^{-\alpha (t - t_0)}$.

Таким образом, задание начального условия дает нам единственное решение задачи.

2. Изменение численности популяции с учетом миграции.

Пусть $N(t)$ - численность популяции животных в некотором районе. Численность популяции изменяется во времени за счет размножения $\Delta N = \alpha N \Delta t$ и за счет миграции животных из соседних районов $\Delta N = f(t)\Delta t$, где $f(t)$- численность мигрирующих животных за единицу времени. В результате имеем

$$\Delta N = \alpha N \Delta t + f(t)\Delta t .$$

При $\Delta t \to 0$ имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N + f(t) .$$

Решение этого уравнения, как будет показано в дальнейшем, имеет вид

$$N(t) = C_0 e^{\alpha t} + \int_{t_0}^{t} f(\tau) e^{\alpha (t-\tau)} d\tau .$$

Дополнительное начальное условие: $N(t_0) = N_0$. Тогда задача формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = \alpha N + f \quad t \in [t_0, t_0 + T]; \\ N(t = t_0) = N_0 . \end{cases} \qquad (2.2)$$

В результате имеем единственное решение задачи:

$$N(t) = N_0 e^{\alpha (t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} f(\tau) e^{\alpha (t-\tau)} d\tau . \qquad (2.3)$$

3. Модель двух взаимодействующих процессов (модель хищник - жертва).

Пусть имеется два временных процесса $y_1(t)$ и $y_2(t)$, которые воздействуют друг на друга. Это означает, что коэффициент роста α одного процесса зависит от значения другого процесса, т.е. мы имеем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \alpha_1(y_2)\bullet y_1(t), t \in [t_0, t_0 + T] \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \alpha_2(y_1)\bullet y_2(t); y_1(t_0) = y_1^0; y_2(t_0) = y_2^0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Решение задачи (2.6) зависит от того, как изменяется коэффициент роста от самого процесса. Мы рассмотрим случай линейной зависимости. Причем коэффициент роста $\alpha_1(y_2)$ растет при росте y_2, а коэффициент $\alpha_2(y_1)$ убывает при росте y_1. В результате имеем:

$$\alpha_1(y_2) = -a + by_2; \alpha_2(y_1) = c - dy_1, \tag{2.7}$$

где коэффициенты a, b, c, d - положительные. Такая зависимость коэффициентов роста характерна для описания взаимодействия популяций хищников и жертв, где $y_1(t)$- численность хищников, а $y_2(t)$- численность жертв. В этом случае рост численности жертв $y_2(t)$ ведет к увеличению скорости роста численности хищников, а рост численности хищников $y_1(t)$ ведет к уменьшению скорости роста численности жертв. Именно поэтому задача (2.6) с условием (2.7) получила название <u>модель хищник-жертва.</u>

Модель хищник-жертва имеет точку равновесия, когда $\alpha_1(y_2^*) = 0$ и $\alpha_2(y_1^*) = 0$. Значения равновесного состояния определяются в виде

$$y_1^* = \frac{c}{d}; y_2^* = \frac{a}{b}.$$

В результате модель хищник-жертва можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = b(y_2 - y_2^*) \bullet y_1(t), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = d(y_1 - y_1^*) \bullet y_2(t) \end{cases} \qquad (2.8)$$

§3.Решение простейших типов дифференциальных уравнений.

Наиболее просто решается уравнение, правая часть которого не зависит от искомой функции, т.е

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t), t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad (3.1)$$

Решение получается интегрированием

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(t)dt \qquad (3.2)$$

Именно поэтому решение дифференциального уравнения часто называют интегралом.

Достаточно просто получается решение дифференциального уравнения, если правая часть зависит от линейной комбинации решения и переменной:

$$\frac{dy}{dt} = f(ay(t) + bt); y(t_0) = y_0 \tag{3.3}$$

Сделаем замену переменной, введя функцию

$$z(t) = ay(t) + bt; z(t_0) = ay_0 + bt_0.$$

Тогда

$$\frac{dz}{dt} = a\frac{dy}{dt} + b = af(z) + b,$$

откуда получаем соотношение

$$\frac{dz}{af(z) + b} = dt,$$

проинтегрировав которое находим решение в виде

$$\int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{af(\xi) + b} = t - t_0,$$

где $z = ay + bt, z_0 = ay_0 + bt_0.$

Большой класс простейших дифференциальных уравнений составляют уравнения с разделенными переменными, где правая часть равна произведению функций, зависящих только от одной переменной:

$$\frac{dy}{dt} = \varphi(y) \bullet \psi(t); y(t_0) = y_0 \tag{3.5}$$

В этом случае решение записывается в виде:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\varphi(y)} = \int_{t_0}^{t} \psi(t)dt \tag{3.6}$$

К уравнению с разделенными переменными сводятся уравнения, правая часть которых зависит от соотношения переменных:

$$\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right) \tag{3.7}$$

Введем функцию $z = y/t$. Продифференцировав $y = z \bullet t$, получим

$$\frac{dy}{dt} = t\frac{dz}{dt} + z = f(z)$$

или

$$\frac{dz}{dt} = \frac{f(z) - z}{t} \quad . \tag{3.8}$$

Получили уравнение с разделенными переменными, решение которого, согласно (3.6) , имеет вид:

$$\int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{f(\xi) - \xi} = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{t} = \ln\frac{|t|}{t_0}.$$

Откуда получаем

$$t = t_0 \bullet \exp \int_{y_0 \bullet t_0}^{y \bullet t} \frac{d\xi}{f(\xi) - \xi} \tag{3.9}$$

§4.Уравнение в полных дифференциалах. Общий интеграл уравнения

Правую часть дифференциального уравнения первого порядка всегда можно представить в виде отношения двух функций:

$$f(t,y) = -\frac{M(t,y)}{N(t,y)}; N(t,y) \neq 0. \qquad (4.1)$$

Тогда уравнение $y'(t) = f(t,y)$ можно записать в эквивалентной форме

$$M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0 \qquad (4.2)$$

Если существует функция $V(t,y)$ такая что

$$M = \frac{\partial V}{\partial t}, \; N = \frac{dV}{\partial y}, \qquad (4.3)$$

то, подставив (4.3) в (4.2) получим уравнение (4.2) в форме полного дифференциала

$$Mdt + Ndy = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial y}dy = dV = 0. \qquad (4.4)$$

Следовательно, имеем

$$V(t,y) = C. \qquad (4.5)$$

Выражение (4.5) дает нам общее решение уравнения (4.1).

Определение 4.1. ***Общим интегралом*** (или ***общим решением***) дифференциального уравнения называются все решения за исключением особых решений.

Возможно другое определение ***общего решения*** через решение задачи Коши, если считать условия существования и единственности решения задачи Коши выполненными.

Определение 4.2. ***Общим решением*** дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной, являются все решения задачи Коши при произвольных начальных данных.

Уравнение (4.5) разрешимо, т.к. $\dfrac{dV}{\partial y} = N \neq 0.$

Следовательно, можно записать общее решение в виде однопараметрического множества функций

$$y = y(t, c) \tag{4.6}$$

Из начальных данных $y(t_0) = y_0$ находится $c = V(t_0, y_0)$.

Рассмотрим, при каких условиях можно записать уравнение (4.2) в полных дифференциалах.

Т е о р е м а **4.1. Необходимым и достаточным условием представления уравнения (4.2) в полных дифференциалах является условие** $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial t}$

(если выполнены условия существования решения)

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Нам необходимо доказать, что условие $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial t}$

является необходимым и достаточным для представления уравнения

$$M(t, y)dt + N(t, y)dy = 0$$

в полных дифференциалах.

1.*Доказательство необходимости.*

Пусть уравнения (4.2) является уравнением в полных дифференциалах. Это означает, что

$$M = \frac{\partial V}{\partial t}; \quad N = \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Откуда имеем $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial t \partial y}$.

Необходимость условия доказана.

2. ***Доказательство достаточности.***

Пусть $M = \dfrac{\partial V}{\partial t}$, следовательно

$$V(t, y) = \int_{t_0}^{t} M(t, y) dt + \varphi(y) \qquad (4.7)$$

Продифференцировав полученные соотношения по y, найдем

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial M}{\partial y} dt + \varphi'(y).$$

Используя условие $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial t}$, получим

$\dfrac{\partial V}{\partial y} = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \dfrac{\partial N}{\partial t} dt + \varphi'(y)$. Проинтегрировав, найдем

$$\frac{\partial V}{\partial y} = N(t, y) - N(t_0, y) + \varphi'(y),$$

где $\varphi(y)$ - некоторая произвольная функция.

Выберем ее в виде

$$\varphi\ (y) = \int_{y_0}^{y} N(t_0, y)dy \qquad (4.8)$$

Тогда $\varphi'\ (y) = N(t_0, y)$. Следовательно,

$\dfrac{\partial V}{\partial y} = N(t, y)$.

Таким образом, из условий $\dfrac{\partial V}{\partial t} = M$ и $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial t}$

мы нашли $\dfrac{\partial V}{\partial y} = N(t, y)$

Теорема доказана.

Выражения(4.7) и (4.8), полученные выше при доказательстве теоремы 4.1 , дают возможность при выполнении условия $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial t}$ определить общее решение уравнения (4.2). Для этого подставим (4.8) в (4.7) и найдем:

$$V(t, y) = \int_{t_0}^{t} M(t, y)dt + \int_{y_0}^{y} N(t_0, y)dy\,. \qquad (4.9)$$

Следовательно, общее решение можно записать в виде

$$V(t, y) = \int_{t_0}^{t} M(t, y)dt + \int_{y_0}^{y} N(t_0, y)dy = C. \qquad (4.10)$$

§5.Интегрирующий множитель.

Предположим, что условие теоремы 4.1 не выполняется, т.е. $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t}$. Поставим следующий вопрос: существует ли такая функция $\mu(t,y)$, что для коэффициентов $M_1 = \mu M$ и $N_1 = \mu N$ условия теоремы 4.1 выполняются.

Определение 5.1. ***Интегрирующим множителем*** уравнения (4.2) называется функция $\mu(t,y)$ такая, что выполнены условия

$$\frac{\partial\,(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial\,(\mu N)}{\partial t} \qquad (5.1)$$

Т е о р е м а **5.1 Если уравнение**

$$Mdt + Ndy = 0$$

имеет общий интеграл $V(t,y) = C$, то это уравнение имеет интегрирующий множитель.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Мы должны доказать, что если уравнение

$$M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0$$

имеет общее решение $V(t,y) = C$, то оно имеет интегрирующий множитель. Пусть

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Из уравнения (4.1) имеем $\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{M}{N}$, а из общего решения $V(t,y)=C$ получим

$$\frac{\partial V}{\partial t}dt+\frac{\partial V}{\partial y}dy=0.$$

Откуда имеем

$$-\frac{dy}{dt}=\frac{M}{N}=\frac{\partial V/\partial t}{\partial V/\partial y}.$$

Следовательно, существует такое $\mu(t,y)$, что

$$\frac{\partial V/\partial t}{M}=\frac{\partial V/\partial y}{N}=\mu.$$

Откуда имеем

$$\mu M=\frac{\partial V}{\partial t},\ \mu N=\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Следовательно, уравнение $\mu Mdt+\mu Ndy=0$ является уравнением в полных дифференциалах.

Теорема доказана.

Следствие. Число интегрирующих множителей бесконечно, т.к. если μ -интегрирующий множитель, то $\mu\varphi(V)$, также интегрирующий множитель.

Докажем это.

Пусть $\mu\ Mdt+\mu\ Ndy=dV$.

Тогда

$$\mu\ \varphi\ (V)Mdt+\mu\ \varphi\ (V)Ndy=\varphi\ (V)dV=dV_1,$$

где $V_1=\int\varphi(V)dV$.

Следствие доказано.

Т е о р е м а **5.2. Формула** $\mu_1 = \mu\,\varphi(V)$ **дает любой интегрирующий множитель уравнения** $Mdt + Ndy = 0$ **(если его решение существует).**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть μ и μ_1 два различных интегральных множителя уравнения $M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0$.

Тогда мы имеем два уравнения в полных дифференциалах

$$\mu\, Mdt + \mu\, Ndy = dV = 0,$$

$$\mu_1 Mdt + \mu_1 Ndy = dV_1 = 0.$$

Следовательно, должны выполняться следующие равенства

$$\mu\, M = \frac{\partial V}{\partial\, t};\ \mu\, N = \frac{\partial V}{\partial\, y};\ \mu_1 M = \frac{\partial V_1}{\partial\, t};\ \mu_1 N = \frac{\partial V_1}{\partial\, y}$$

Откуда получаем

$$\frac{M}{N} = \frac{\partial\, V/\partial\, t}{\partial\, V/\partial\, y} = \frac{\partial\, V_1/\partial\, t}{\partial\, V_1/\partial\, y}\ .$$

Это означает равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\, V}{\partial\, t} & \dfrac{\partial\, V}{\partial\, y} \\[2ex] \dfrac{\partial\, V_1}{\partial\, t} & \dfrac{\partial\, V_1}{\partial\, y} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Данный определитель есть якобиан функций V и V_1, который равен нулю. Следовательно, V и V_1 связаны функционально: $V_1 = \psi\ (V)$. Это означает, что

$$\mu_1 Mdt + \mu_1 Ndy = dV_1 = \psi'\ dV =$$
$$= \psi'\ (V)\mu\ Mdt + \psi'\ (V)\mu\ Ndy,$$

Откуда следует $\mu_1 = \mu\ \ \psi'\ (V)$ или $\mu_1 = \mu\,\varphi(V)$ для любых μ, μ_1.

Теорема доказана.

Следствие. Из теоремы 5.2 следует, что если известны два интегрирующих множителя $\mu_1\ (t, y)$ и $\mu_2\ (t, y)$, причем $\dfrac{\mu_1(t, y)}{\mu_2(t, y)} \neq const$, то выражение

$$\mu_2\ (t, y) = c\mu_1\ (t, y), c = const \qquad (5.2)$$

дает общее решение дифференциального уравнения.

Это следует из того, что, согласно теореме 5.2, два интегрирующих множителя обязательно связаны соотношением

$$\mu_2(t, y) = \varphi(V)\mu_1(t, y).$$

Следовательно, подставив в это равенство соотношение (5.2), получим $\varphi(V(t, y)) = c$, или, разрешив это равенство, получим общее решение в виде

$$V(t, y) = c = const.$$

Таким образом, знание интегрирующего множителя позволяет нам найти общее решение в виде (4.10)

Естественно, возникает вопрос о том, как найти интегрирующий множитель.

Из условия $\dfrac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \dfrac{\partial}{\partial t}(\mu N)$ при $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial t}$ мы получим дифференциальное уравнение для определения $\mu(t, y)$ в виде

$$N\frac{\partial \mu}{\partial t} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right) \qquad (5.3)$$

В общем случае решение данного уравнения не легче, чем решение исходного уравнения (4.1). Однако в частных случаях, когда интегрирующий множитель зависит только от одной переменной ($\mu = \mu\ (t)$ или $\mu = \mu\ (y)$), его легко определить.

1.Если $\mu = \mu\ (t)$, то $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, и, согласно (5.3), получаем уравнение для $\mu\ (t)$ в виде

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu \bullet f(t)\ , \qquad (5.4)$$

где

$$f(t) = \frac{1}{N(t, y)}\left(\frac{\partial M(t, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(t, y)}{\partial t}\right). \qquad (5.5)$$

Естественно, это возможно, если выражение (5.5) является функцией только переменной *t* и не зависит от *y(t)*. Уравнение (5.4) легко решается, и мы находим интегрирующий множитель в виде

$$\mu\,(t) = e^{\int f(t)dt}.$$

Рассмотрим другой случай, когда $\mu = \mu\ (y)$.

2. Если $\mu = \mu\ (y)$, то $\dfrac{\partial \mu}{\partial\ t} = 0$, и, согласно (5.3), находим уравнение для $\mu\ (y)$ в виде

$$\frac{d\mu}{dy} = \varphi\ (y)\bullet\mu \tag{5.6}$$

где

$$\varphi(y) = \frac{1}{M(t,y)}\left(\frac{\partial\ N(t,y)}{\partial\ t} - \frac{\partial\ M(t,y)}{\partial\ y}\right). \tag{5.7}$$

Естественно, это возможно, если выражение (5.7) является функцией только переменной *y* и не зависит от *t*. Уравнение (5.6) легко решается, и находится интегрирующий множитель в виде

$$\mu\ (y) = e^{\int \varphi\ (y) dy}. \tag{5.8}$$

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Найти интегрирующий множитель для уравнения $y^2dt - t(y + t^2)dy = 0.$

Решение.

$M = y^2, N = -ty - t^3$. Тогда

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y, \dfrac{\partial N}{\partial t} = -\ y - 3t^2.$

Отсюда получаем

$$f(t)=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}\right)=-\frac{3}{t}.$$

Следовательно, интегрирующий множитель равен

$$\mu(t)=e^{-3\int\frac{dt}{t}}=e^{-3\ln t}=\frac{1}{t^3}$$

Умножив уравнение на интегрирующий множитель, получим

$$\frac{y^3}{t^3}dt-\frac{y+t^2}{t^2}dy=0 \text{ или } d\left(\frac{y^2}{2t^2}+y\right)=0.$$

Следовательно, общее решение $y^2-t^2(c-2y)=0$.

Пример 2. Найти интегрирующий множитель для уравнения $y\bullet tdt-(y^3+t^2y+t^2)dy=0.$

Решение.

$$M(t,y)=y\bullet t,\ \ N(t,y)=-(y^3+t^2y+t^2),$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=t,\frac{\partial N}{\partial t}=-2t(y+1).$$

Откуда $\varphi(y)=\dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial N}{\partial t}-\dfrac{\partial M}{\partial y}\right)=-\dfrac{2y+3}{y}.$

Следовательно, согласно (5.8), интегрирующий множитель равен

$$\mu(y)=e^{-\int\frac{2y+3}{y}dy}=e^{-2y-3\ln y}=\frac{1}{y^3}e^{-2y}.$$

Откуда получаем уравнение в полных дифференциалах в виде

$$\frac{t}{y^2}e^{-2y}dt-\left(1+\frac{t^2}{y^2}+\frac{t^2}{y^3}\right)e^{-2y}dy=0$$

или

$$d\left(\frac{t^2+y^2}{y^2}e^{-2y}\right)=0.$$

Тогда общее решение уравнения равно

$(t^2+y^2)e^{-2y}-cy^2=0.$

Задачи к вводной главе.

1.Найти общее решение уравнений с разделяющимися переменными:

1.1 $y'=(y^4+1)/xy$

1.2 $xy'=y^2-y$

1.3 $y'=e^y-1$

1.4 $x^2y'=1+\cos 2y$

2. Найти общее решение уравнений, сводя их к уравнению с разделяющимися переменными:

2.1 $y'=y+3x$

2.2 $y'=y+2x-3$

2.3 $x^2y'=y^2+0,25x^2$

2.4 $y'=\cos(y-x)$

3. Составить уравнение и решить задачи:

3.1. Скорость остывания тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Температура окружающей среды поддерживается постоянной равной $20^0 C$. Известно, что за 10 мин тело остыло от $100^0 C$ до $60^0 C$. За какое время тело остынет $60^0 C$ до $40^0 C$?

3.2. Тело падает с высоты 200 м. Через какое время тело упадет на земную поверхность, если известно, что за счет сопротивления воздуха максимально возможная скорость тела равна 50 м/сек. Сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости. Ускорение свободного падения $g = 10 м / c^2$.

3.3. Из цилиндрического бака высотой 100см с площадью дна $S_0 = 100 см^3$ вытекает вода через отверстие в дне бака площадью $4 см^2$. За какое время вся вода вытечет из бака, если за 100 сек вытекло 0,75 объема бака? Скорость вытекания воды из отверстия равна $V(t) = k\sqrt{h(t)}$, где $h(t)$ - высота уровня воды над отверстием.

4. Найти общее решение уравнений в полных дифференциалах:

   4.1. $(t^2 + y)dt + (t + 2y)dy = 0.$

   4.2 $(t - 3y)dt + (y^2 - 3t)dy = 0.$

   4.3 $ydt + (t - y / \sqrt{1 + y^2})dy = 0.$

5. Определить интегрирующий множитель и найти общее решение уравнений:

   5.1. $(t^2 - y^2 + y)dt + t(2y - 1)dy = 0.$

   5.2 $(2ty + t^2 y + y^3 / 3)dt + (t^2 + y^2)dy = 0.$

   5.3 $(t - y)dt + (t + y)dy = 0.$

ГЛАВА I
Задача Коши для уравнения первого порядка

§6.Сведение задачи Коши к интегральному уравнению. Лемма Гронуолла-Беллмана.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y(t)),\ t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{6.1}$$

Решение задачи $y = y(t)$ представляет собой кривую на плоскости (t,y). Эта кривая называется интегральной кривой.

Определение 6.1. Постановка задачи называется ***корректной по Адамару***, если в ней заданы такие условия, что существует единственное решение задачи, устойчивое к малым изменениям ее параметров.

Это означает, что постановка задачи обеспечивает существование и единственность решения (т.е. определяет математическую разрешимость задачи). Кроме того, решение задачи должно быть устойчивым по отношению к изменениям правой части и начальных данных. Это определяет физическую детерминированность задачи.

Таким образом, нам последовательно необходимо доказать существование и единственность решения задачи Коши (6.1) и исследовать непрерывность решения от параметров задачи. При доказательстве будет использовано интегральное уравнение, которое получается из задачи Коши (6.1) интегрированием по t.

Тогда

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y)d\tau,\ t \in [t_0, t_0 + T] \qquad (6.2)$$

Легко доказать, что задача Коши (6.1) и интегральное уравнение (6.2) эквивалентны. Эквивалентность задач означает, что любое решение одной задачи является решением другой задачи.

Лемма 6.1 Задача Коши для уравнения первого порядка (6.1) эквивалентна интегральному уравнению (6.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть существует некоторое решение $y(t)$ задачи Коши (6.1). Подставив это решение в уравнение (6.1) получим тождество, которое можно проинтегрировать. В результате получим интегральное уравнение (6.2). Следовательно, любое решение задачи Коши является решением интегрального уравнения.

Докажем теперь эквивалентность в обратную сторону. Пусть существует решение интегрального уравнения (6.2). Подставив это решение в интегральное уравнение, получим тождество, которое можно продифференцировать. Тогда получим дифференциальное уравнение (6.1). Следовательно, любое решение интегрального уравнения является решением задачи Коши.

Лемма доказана.

Доказав эквивалентность задачи Коши и интегрального уравнения, мы можем доказательство существования, единственности и непрерывности решения по параметрам для задачи Коши проводить, исследуя интегральное уравнение. При доказательстве этих теорем нам надо будет использовать оценку для интегральных неравенств, которую дает следующая лемма Гронуолла-Беллмана.

Лемма Гронуолла-Беллмана. Если непрерывная функция Z(t) удовлетворяет условию при $t \geq t_0$

$$0 \leq Z(t) \leq k\int_{t_0}^{t} Z(\tau)d\tau + g(t); \quad k = const, \qquad (6.3)$$

то выполняется оценка

$$0 \leq Z(t) \leq k\int_{t_0}^{t} g(\tau)e^{k(t-\tau)}d\tau + g(t). \qquad (6.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.
Нам необходимо из неравенства

$$0 \leq Z(t) \leq k\int_{t_0}^{t} Z(\tau)d\tau + g(t); \quad k = const,\ Z \in C$$

получить оценку

$$0 \leq Z(t) \leq k\int_{t_0}^{t} g(\tau)e^{k(t-\tau)}d\tau + g(t)$$

Вначале выведем дифференциальную оценку.
Пусть $R'(t) \leq kR(t) + g(t)$ при $t \geq t_0$ и

$$\begin{cases} R(t_0) = 0 \\ k = const \end{cases}.$$

Тогда $R'(t) - kR(t) \leq g(t)$.Отсюда имеем

$$R(t)e^{-kt}\;{}' e^{kt} \leq g(t) .$$

Проинтегрировав неравенство и, учитывая, что $R(t_0) = 0,$ получим

$$R(t) \le \int_{t_0}^{t} g(\tau)e^{k(t-\tau)}d\tau. \qquad (6.5)$$

Теперь проведем общее доказательство

Введем $R(t) = \int_{t_0}^{t} Z(\tau)d\tau$; $R(t_0) = 0$; $R' = Z(t)$.

Подставим в (6.3)

$$\begin{aligned} &0 \le R'(t) \le kR(t) + g(t); \\ &\text{при} \quad t \ge t_0 \;\; R(t) = 0,\; k = const \end{aligned} \qquad (6.6)$$

Тогда, согласно (6.5), получаем

$$R(t) \le \int_{t_0}^{t} g(\tau)e^{k(t-\tau)}d\tau,$$

или, подставив в правую часть (6.6) получим требуемое неравенство

$$0 \le Z(t) \le k\int_{t_0}^{t} g(\tau)e^{k(t-\tau)}d\tau + g(t).$$

Лемма доказана.

В дальнейшем нам часто потребуется использовать лемму Гронуолла-Беллмана для частного случая, когда $g(t) = 0$. В этом случае имеем, что из оценки

$0 \le Z(t) \le k\int_{t_0}^{t} Z(\tau)d\tau; \quad k = const$ следует оценка

$Z(t) = 0$.

§7.Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения, разрешенного относительно производной.

Мы должны рассмотреть последовательно все вопросы корректности постановки задачи Коши. В первую очередь, это выяснение существования и единственности решения задачи Коши. Для простоты изложения основных этапов доказательств рассмотрим вначале существование и единственность решения задачи Коши для одного уравнения первого порядка:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), \quad t \in t_0, t_0 + T \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad (7.1)$$

Существуют разные подходы для доказательства существования и единственности решения задачи Коши. Мы будем изучать этот вопрос на основе перехода от задачи Коши к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau; \qquad t \in t_0, t_0 + T \qquad (7.2)$$

Вначале докажем единственность решения задачи Коши, т.е. единственность решения интегрального уравнения(7.2).

Т е о р е м а **7.1 Решение задачи Коши (7.1) для дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной единственно, если**

1) $f(t, y)$ **непрерывна по** t **и** y **в области**

R: $t_0 < t < t_0 + T$; $y_0 - b < y < y_0 + b$;

2) $f(t, y)$ **удовлетворяет в области R условию Липшица по** y **т.е.**

$$\left|f(t, y_1) - f(t, y_2)\right| \le N\left|y_1 - y_2\right|, \quad y_1, y_2 \in \left[y_0 - b, y_0 + b\right]$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Рассмотрим интегральное уравнение (7.2).

Предположим, что оно имеет два решения $y_1(t)$ и $y_2(t)$. Тогда их разность $U(t) = y_1(t) - y_2(t)$ удовлетворяет, согласно уравнению (7.2), интегральному соотношению

$$\begin{cases} U(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \left[f\left(\tau, y_1(\tau)\right) - f\left(\tau, y_2(\tau)\right) \right] d\tau \\ U(t_0) = 0 \end{cases}.$$

Сделаем оценку $U(t)$. Используя условия Липшица

$$\left|f(\tau, y_1) - f(\tau, y_2)\right| \le N\left|U(\tau)\right|,$$

получаем

$$\left|U(\tau)\right| \le \int\limits_{t_0}^{t} \left|f(\tau, y_1) - f(\tau, y_2)\right| d\tau \le N \int\limits_{t_0}^{t} \left|U(\tau)\right| d\tau \quad \text{при}$$

$$t_0 < t < t_0 + \varepsilon,$$

где ε выбирается так, что $\left|y_m(t) - y_0\right| \le b, \quad m = 1, 2, ,$ и, следовательно, можно использовать условие

Липшица. Так как $N = const$, то, по лемме Гронуолла – Беллмана, при $g(t) \equiv 0$ имеем

$$0 \le U(t) \le 0 \quad .$$

Следовательно, $U(t) \equiv 0.$ Откуда получаем $y_1 = y_2$

Теорема доказана.

Таким образом, для единственности решения должны быть выполнены два условия. Первое условие – непрерывность правой части $f(t, y)$- естественно, так как мы определили решение как функцию, имеющую непрерывную производную. Второе условие, как видно из текста доказательства теоремы единственности, является необходимым при оценке разности двух решений и применении затем леммы Гронуолла – Беллмана. Возникает вопрос: не связано ли второе условие с методом доказательства теоремы, а не с принципиальной необходимостью? На этот вопрос можно ответить с помощью примера неединственности решения задачи Коши.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{y}, & t \in 0, T \\ y(t=0) = 0 \end{cases} .$$

Легко видеть, что данная задача имеет два решения

$$y(t) = 0 \text{ и } y(t) = \frac{t^2}{4}.$$

При этом правая часть уравнения $f(t, y) = \sqrt{y}$ не удовлетворяет условию Липшица по переменной y.

Если правая часть дифференциального уравнения $f(t, y)$ непрерывна по t и y и имеет ограниченную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, то условие Липшица по y выполняется, и, следовательно, мы имеем в этом случае единственное решение задачи Коши.

Определение 7.1. Если через точку $M_0 = (t_0, y_0)$ проходит единственная интегральная кривая (выполнены условия теоремы единственности), то такая точка называется ***обыкновенной точкой.***

Определение 7.2. Если через точку $M_0 = (t_0, y_0)$ проходит неединственная интегральная кривая(нарушены условия теоремы единственности) или не проходит ни одной интегральной кривой (нарушены условия существования решения), то она называется ***особой точкой.***

Перейдем теперь к доказательству существования решения задачи Коши. Доказано, что для существования достаточно выполнение условия 1 теоремы 7.1 (теорема Пеано). Мы докажем теорему существования для случая, когда выполняются оба условия теоремы 7.1, т.е. случай, когда решение единственно.

Т е о р е м а **7.2. Решение задачи Коши (7.1) при выполнении условий (1) и (2) теоремы 7.1 существует в интервале $t_0 - h < t < t_0 + h$, где $h = \min(T, b/M)$, а $|f| \le M$ в R.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

При доказательстве теоремы будет использоваться признак Вейерштрасса сходимости функционального ряда. Он рассматривается в курсе математического анализа. Приведем его без доказательства.

Признак Вейерштрасса.

Если функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} U_k(t)$ определен на $t \in [t_0, t_0+T]$ и если существует сходящийся числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ такой, что для всех $t \in [t_0, t_0+T]$ и для $\forall k$ справедлива оценка

$$|U_k(t)| \le C_k,$$

то функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно на $[t_0, t_0+T]$.

Следствие из признака Вейерштрасса.

Если $U_k(t)$ - непрерывная функция и ряд сходится равномерно, то предел ряда $V(t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t)$ - непрерывная функция.

Нам необходимо доказать существование решения задачи Коши при выполнении условий теоремы 7.1. Так как задача Коши эквивалентна интегральному уравнению (7.2), то необходимо доказать существование решения интегрального уравнения. Будем строить решение интегрального уравнения методом последовательных приближений:

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_{n-1}(\tau))d\tau. \qquad (7.3)$$

Легко видеть, что если

$y_{n-1}(t) \in R: \ \{t_0 \le t \le t_0+T, |y - y_0| \le b\}$,

то и $y_n(t) \in R$, т.к.

$$|y_n - y_0| \le M|t - t_0| \le Mh \le b. \qquad (7.4)$$

Поскольку $y_0 \in R$,то, по методу математической индукции, все $y_n \in R$. Теперь докажем, что существует предел $Y(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$.

Представим n-ое приближение в виде:

$$y_n = y_0 + \sum_{m=1}^{n} (y_m - y_{m-1}). \qquad (7.5)$$

Если мы докажем, что ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} (y_m - y_{m-1})$ сходится, то сможем утверждать, что существует решение интегрального уравнения

$$Y(x) = y_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (y_m - y_{m-1}).$$

Для доказательства сходимости функционального ряда построим мажорантную оценку членов ряда (7.5)

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_0(\tau)) d\tau \right| \le M |t - t_0| \le Mh,$$

$$|y_2 - y_1| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_0(\tau)) \; d\tau \right|.$$

Используя условия Липшица, получим

$$|y_2 - y_1| \le N \int_{t_0}^{t} |y_1 - y_0| d\tau \le NM \int_{t_0}^{t} |\tau - t_0| d\tau \le$$

$$\le NM \frac{|t - t_0|^2}{2} \le NM \frac{h^2}{2}$$

и т.д. Следовательно, по методу математической индукции, получим

$$\left|y_m - y_{m-1}\right| \le MN^{m-1}\frac{h^m}{m!}.$$

Мажорантный ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} MN^{\,m-1}\dfrac{h^m}{m!}$ сходится по признаку Даламбера

$$\lim_{m\to\infty}\frac{U_{m+1}}{U_m} = \lim_{m\to\infty}\frac{Nh}{m+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, функциональный ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}(y_m - y_{m-1})$ сходится абсолютно и равномерно по признаку Вейерштрасса при $\left|t - t_0\right| \le h$, и мы имеем предел

$$Y(t) = \lim_{n\to\infty} y_n(t), \qquad (7.6)$$

причем $Y(t)$, согласно следствию из признака Вейерштрасса, непрерывная функция. Покажем теперь, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(\tau, y_{n-1})d\tau = \int_{t_0}^{t} f(\tau, Y(\tau))d\tau \qquad (7.7)$$

Так как $f(\tau, y_{n-1})$ удовлетворяет условиям (1) и (2) теоремы 7.1, то $\left|f(t,y') - f(t,y'')\right| < \varepsilon$, если $\left|y' - y''\right| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{N}$ (N-коэффициент Липшица). Тогда существует n_0 такое, что при $n-1 > n_0$ имеем из условия $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(t) = Y(t)$, что $\left|y_{n-1} - Y\right| < \delta$.

Тогда $\left| f(t, y_{n-1}) - f(t, Y) \right| \le \varepsilon(\delta)$ при $n-1 > n_0$,
причем $\varepsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.
Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_{n-1}) d\tau = \int_{t_0}^{t} f(\tau, Y) d\tau \ .$$

Отсюда следует, что при $n \to \infty$ из соотношения

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_{n-1}(\tau) d\tau$$

имеем предельное соотношение

$$Y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, Y(\tau)) d\tau \,.$$

Таким образом, получили, что интегральное уравнение имеет решение $Y(t)$. Продифференцировав интегральное уравнение, получим, что существует решение задачи Коши

$$\frac{dY}{dt} = f(t, Y(t)) \qquad Y(t_0) = y_0 \ .$$

Теорема доказана.

Обратим внимание на то, что существование решения задачи Коши доказывается не для всего интервала $t \in [t_0, t_0 + T]$, а для $\left| t - t_0 \right| \le h = \min(T, b / M)$, где M ограничивает f в области **R.**

§8. Дифференциальное уравнение первого порядка, неразрешенное относительно производной. Теорема существования и единственности решения

В предыдущем параграфе был рассмотрен вопрос существования и единственности решения дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной. Рассмотрим теперь уравнение, неразрешенное относительно производной

$$F(t, y, y') = 0 \qquad t, y, y' \in D_3 \in R_3 . \quad (8.1)$$

Мы будем рассматривать уравнение (8.1) в некотором замкнутом параллелепипеде

$$D_3 : \ |t - t_0| \le T, \ |y - y_0| \le b, \ |y' - y_0'| \le c \ .$$

В начальные условия теперь входит не только $y(t_0) = y_0$, но и $y'(t_0) = y_0'$. Ясно, что задание $y'(t_0)$ должно быть согласовано с уравнением (8.1), т.е. y_0' должен быть действительным корнем уравнения

$$F(t_0, y_0, y_0') = 0.$$

В принципе, уравнение может иметь несколько действительных корней. Поэтому при задании y_0' выбирается единственный корень, а, следовательно, единственное решение. Естественно, этот корень должен быть некратным. Кроме того, должны выполняться условия разрешимости $y'(t)$ из уравнения (8.1). Для этого необходимо, чтобы существовала непрерывная частная производная $\frac{\partial F}{\partial y'}$, причем $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$ в окрестности точки (t_0, y_0, y_0'). Если мы можем из (8.1) определить $y'(t) = f(t, y)$, то можно использовать доказанные ранее теоремы единственности и существования решения для уравнения, разрешенного относительно производной. Таким образом, имеет место теорема.

Т е о р е м а **8.1. Если в некотором замкнутом трехмерном параллелепипеде**

$$D_3: \ t_0 - h < t < t_0 + h, \ y_0 - b < y < y_0 + b,$$
$$y_0' - c < y' < y_0' + c$$

с центром в точке (t_0, y_0, y_0')**,где** y_0'**- действительный корень уравнения** $F(t_0, y_0, y_0') = 0$**, выполнены условия:**
а) $F(t, y, y')$ **непрерывна по совокупности аргументов вместе с частными производными** $\frac{\partial F}{\partial y}$ **и** $\frac{\partial F}{\partial y'}$**;**

б) $\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{t_0, y_0, y_0'} \neq 0$**,**

то в окрестности точки $t = t_0$ существует единственное решение $y = y(t)$ уравнения (8.1),удовлетворяющее начальным условиям $y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y'_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Необходимо доказать существование и единственность решения уравнения первого порядка, неразрешенного

относительно производной

$$F(t, y, y') = 0,\ \ t, y, y' \ \in D_3 \in R \qquad (8.1)$$

Так как по условию теоремы частная производная $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ непрерывна в D_3 и $\dfrac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$ в начальной точке

(t_0, y_0, y'_0), то мы можем утверждать, что $\dfrac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$ и в

некоторой окрестности начальной точки.

Следовательно, в этой окрестности начальной точки уравнение $F(t_0, y_0, y'_0) = 0$ можно разрешить

относительно производной $y'(t)$ и получить уравнение

$y'(t) = f(t, y)$, причем $y'_0 = f(t_0, y_0)$.

Тогда мы получаем задачу Коши

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y), t \in [t_0, t_0 + \varepsilon], \\ y(t_0) = y_0, \ \ y_0' = f(t_0, y_0) \end{cases} \qquad (8.2)$$

для уравнения, разрешенного относительно производной. Причем ε определяет окрестность $|t - t_0| \le \varepsilon$, где $\dfrac{\partial F}{\partial y'} \ne 0$. Для доказательства существования и единственности решения уравнения $F(t, y, y') = 0$ в окрестности начальной точки нам достаточно проверить, выполняются ли условия теорем о единственности и существования решения для задачи Коши (8.2).

Согласно теоремам 7.1 и 7.2 , должны выполняться условия непрерывности $f(t, y)$и условие Липшица для $f(t, y)$ по y. Так как $F(t, y, y')$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ непрерывны по всем переменным, то, при разрешимости уравнения $F(t, y, y') = 0$ относительно $y'(t)$, получаем непрерывную функцию $f(t, y)$. Следовательно, условие (1) в теоремах существования и единственности выполнено.

Условие Липшица для $f(t, y)$ по y также выполнено, т.к. выполняется более сильное условие существования непрерывной производной $\dfrac{\partial f(t, y)}{\partial y}$ в окрестности начальной точки. Для доказательства этого утверждения вычислим $\dfrac{\partial y'}{\partial y}$ из неявной функции

$F(t,y,y')=0$, которая равна

$$\frac{\partial y'}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial y'}.$$

Так как по условию нашей теоремы $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ **и** $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ непрерывны и $\dfrac{\partial F}{\partial y'}\neq 0$ в окрестности начальной точки, то, следовательно, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна в окрестности начальной точки**.**

Следовательно, решение задачи Коши (8.2) существует и единственно. Однако, в окрестности начальной точки, задачи Коши (8.2) эквивалентна задаче (8.1).

$$F(t_0,y_0,y_0')=0,\quad y(t_0)=y_0,\quad y'(t_0)=y_0'.$$

Следовательно, задача (8.1) имеет решение, и притом единственное, в окрестности начальной точки.

Теорема доказана.

Отметим, что в теореме говорится о существовании и единственности решения уравнения (8.1) только в окрестности начальной точки.

Рассмотрим теперь вопрос о методе решения дифференциального уравнения, неразрешенного относительно производной. Вначале рассмотрим простейший случай, когда уравнение можно разрешить относительно $y'(t)$ в аналитическом виде.

Пусть дано уравнение

$$y'^{\,2}_{(t)} + 2y(t)y'(t) + y^2 - (t+2)^2 = 0,\ t \in [0,T] \quad (8.3)$$

с начальным условием $y(0) = 0$.

Уравнение (8.3) относительно $y'(t)$ имеет два корня. В результате получаем два дифференциальных уравнения:

$$y'(t) = -y(t) + t + 2 \quad (8.4)$$

$$y'(t) = -y(t) - t - 2 \quad (8.5)$$

При $t = 0$ из уравнения (8.4) находим $y'(0) = 2$, а из уравнения (8.5) получаем $y'(0) = -2$. В зависимости от выбора $y'(0)$ мы получаем разные уравнения, разрешенные относительно $y'(t)$ - эквивалентные задаче Коши (8.3).

Например, при постановке задачи (8.3) в виде

$$\begin{cases} (y'_{(t)})^2 + 2y(t)y'(t) + y^2 - (t+2)^2 = 0,\ t \in [0,T] \\ y(t=0) = 0, \quad y'(t=0) = 2 \end{cases} \quad (8.6)$$

мы получаем эквивалентную задачу Коши

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + t + 2, \quad t \in [0,T] \\ y(t=0) = 0, \end{cases}, \quad (8.7)$$

которая имеет единственное решение

$$y(t) = t + 1 - e^{-t}.$$

Если взять другое значение $y'(0) = -2$, то имеем задачу

$$\begin{cases} (y'_{(t)})^2 + 2y(t)y'(t) + y^2 - (t+2)^2 = 0, \ t \in [0,T] \\ y(t=0) = 0, \quad y'(t=0) = -2 \end{cases} \tag{8.8}$$

Тогда эквивалентная задача Коши равна

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) - t - 2, \quad t \in [0,T] \\ y(t=0) = 0, \end{cases} \tag{8.9}$$

и мы получаем единственное решение

$$y(t) = -t - 1 + e^{-t}.$$

Если $y'(t)$ невозможно аналитически определить из уравнения (8.1), то используется ***метод введения параметра.***

Рассмотрим сначала частный случай, когда из уравнения $F(t, y, y') = 0$ можно определить $y(t) = f(t, y')$, т.е

$$F(t, y, y') = f(t, y') - y = 0.$$

Для существования и единственности решения, согласно теореме 8.1, должны выполняться условия непрерывности $f(t, y')$ и частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ **и** $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$ **,** причем $\dfrac{\partial f}{\partial y'} \neq 0$.

Для получения уравнения, разрешенного относительно производной, вводится параметр $p(t) = y'$, и исходное уравнение записывается в виде

$$y(t) = f(t, p).$$

Продифференцировав это уравнение по t, получим

$$\frac{dy}{dt} = p(t) = \frac{d}{dt}\quad f(t,p)\quad = \frac{\partial f(t,p)}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dt}.$$

Окончательно, получаем уравнение для $p(t)$

$$\frac{dp}{dt} = f_1(t,p) = \frac{p(t) - \dfrac{\partial f(t,p)}{\partial t}}{\dfrac{\partial f(t,p)}{\partial p}}. \quad (8.10)$$

Это уравнение разрешено относительно производной. Найдя его общее решение $p = p(t,c)$, получим решение исходного уравнения в виде

$$y(t) = f(t, p(t,c)). \qquad (8.11)$$

Мы нашли общее решение нашего уравнения, в котором константа C должна однозначно определяться из начальных данных. Начальные данные (t_0, y_0, y_0') должны быть согласованы:

$$y_0 = f(t_0, y_0').$$

Рассмотрим для примера задачу

$$\begin{cases} y'^5(t) + ty' - y = 0, & t \in [0,T] \\ y(t=0) = 1, & y'(t=0) = 1. \end{cases}.$$

Легко проверить, что начальные данные согласованы с уравнением. Введем $p(t) = y'(t)$. Тогда из уравнения имеем $y(t) = p^5 + tp$,причем $\dfrac{\partial}{\partial p}(p^5 + tp) = 5p^4 + t > 0$

при $t \geq 0,$ а $\dfrac{\partial}{\partial t}(p^5 + tp) = p$. Откуда, согласно (8.10), получаем задачу Коши для $p(t)$

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = 0, \quad t \in [0, T], \\ p(0) = 1. \end{cases}$$

решением которой является $p(t) = 1$. Тогда для исходной задачи находим $y(t) = 1 + t.$

Общий случай введения параметра.

Введем $y'(t) = p(t)$ и получим, согласно (8.1), уравнение

$$F(t, y, p) = 0. \tag{8.12}$$

Выражение (8.12) определяет поверхность в пространстве (t, y, p). Зададим эту поверхность параметрически:

$$\begin{cases} t = T(u, v)\ ; \\ y = Y(u, v); \\ p = P(u, v). \end{cases}$$

Тогда, согласно (8.12) имеем

$$F(T(u,v), Y(u,v), P(u,v)) = 0\,.$$

Следовательно, мы можем определить

$$v = V(u)$$

Найдем дифференциальное уравнение для v от u.

Так как $dy = pdt$, то, подставив

$$dy = \frac{\partial Y}{\partial u}du + \frac{\partial Y}{\partial v}dv; \;\; pdt = P(u,v)\left(\frac{\partial T}{\partial u}du + \frac{\partial T}{\partial v}dv\right)$$

,

получим

$$\frac{\partial Y}{\partial u}du + \frac{\partial Y}{\partial v}dv; \;\; pdt = P(u,v)\left(\frac{\partial T}{\partial u}du + \frac{\partial T}{\partial v}dv\right).$$

Откуда

$$\frac{dv}{du} = \Phi(u,v) = \frac{P(u,v)\dfrac{\partial T}{\partial u} - \dfrac{\partial Y}{\partial u}}{\dfrac{\partial Y}{\partial v} - P(u,v)\dfrac{\partial T}{\partial v}} \; . \qquad (8.13)$$

Получили уравнение в (u, v), которое разрешено относительно производной $\dfrac{dv}{du}$.

Рассмотрим для примера задачу

$$\begin{cases} (y'(t))^2 - y(y-2ty')^3 = 0, \quad t \in [0,T] \\ y(t=0) = 1, \quad y'(t=0) = 1. \end{cases}.$$

Легко видеть, что начальные данные согласованы с уравнением. Введем $p(t) = y'(t)$. Тогда имеем уравнение

$p^2 - y(y-2tp)^3 = 0$ или $(py)^2 - (y^2 - 2tpy)^3 = 0$.

Введем новую функцию $v(t)$ такую, что

$py = v^3, \;\; y^2 - 2tpy = v^2$ или $y^2 = v^2 + 2tv^3$.

Тогда получаем параметрическую зависимость

$$\begin{cases} t = t, \\ y = \sqrt{v^2 + 2tv^3}, \\ p = \dfrac{v^3}{\sqrt{v^2 + 2tv^3}}. \end{cases}$$

Отсюда, согласно (8.13), определяем $\dfrac{dv}{dt}$ в виде

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\dfrac{v^3}{\sqrt{v^2 + 2tv^3}} - \dfrac{\partial}{\partial t}(\sqrt{v^2 + 2tv^3})}{\dfrac{\partial}{\partial u}(\sqrt{v^2 + 2tv^3})} = 0 \text{ или}$$

$$v = C = \text{const.}$$

Следовательно, $y = \sqrt{c^2 + 2tc^3}$. Из условия $y(0) = 1$ находим C=1 и решение задачи $y = \sqrt{1 + 2t}$.

§9. Особые решения уравнения первого порядка, неразрешенного относительно производной.

Определение 9.1 ***Особым решением*** называется такое решение дифференциального уравнения, во *всех* точках которого нарушается единственность решения задачи Коши.

Рассмотрим вначале уравнение, разрешенное относительно производной $y' = f(t, y)$. Нарушение единственности будет там, где нарушаются условия теоремы существования и единственности. Если $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ не ограничено, то условие Липшица не выполнено, и единственность нарушена.

Например :

$$\frac{dy}{dt} = y^{\;2/3}; \quad \frac{\partial}{\partial\, \mathrm{y}}\, y^{\;2/3} = \frac{2}{3} y^{\;-1/3} = \infty \quad \text{при } y = 0.$$

Имеем два решения уравнения

$$y_1(t) = 0; \qquad y_2 = \frac{(t+c)^3}{27}.$$

Функция $y(t) = 0$ является особым решением, т.к во всех точках $y(t) = 0$ существует второе решение $y_2 = (t+c)^3 \big/ 27$. Возьмем , например, начальное условие при $t = t_0$, $y(t_0) = 0$. Тогда будет две интегральных кривых, проходящих через эту точку:

$$y_1(t) = 0 \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{(t-t_0)^3}{27}$$

Рассмотрим общий случай

$$F(t, y, y') = 0.$$

Если бы мы разрешили это уравнение относительно производной, то для соответствующей ветви мы могли бы вычислить $\dfrac{\partial y'}{\partial y}$. В соответствии с правилом дифференцирования неявной функции, имеем

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial y'} \;. \tag{9.1}$$

Если $\partial F / \partial y$ ограничено, то условием нарушения единственности $\left(\dfrac{\partial y'}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \infty\right)$ будет

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \tag{9.2}$$

Таким образом, условием (необходимым) существования особого решения будет

$$\begin{cases} F(t, y, y') = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} F(t, y, p) = 0 \\ \dfrac{\partial F(t, y, p)}{\partial p} = 0 \end{cases} \tag{9.3}$$

Исключив из системы (9.3) p ,получим p - дискриминантную кривую $y = y(t)$, которая будет особым решением, если $y = y(t)$ является решением $F(t, y, y') = 0$.

Для примера рассмотрим уравнение

$$(y')^2 - ty' + y = 0 \ ; F(y, p) = p^2 - tp + y; \ \frac{\partial F}{\partial p} = 2p - t$$

Получим систему для определения особого решения

$$\begin{cases} p^2 - tp + y = 0, \\ 2p - t = 0. \end{cases}$$

откуда находим

$$\begin{cases} y = \dfrac{t^2}{4} \\ p = \dfrac{t}{2} \end{cases}$$

Следовательно, $y=\dfrac{t^2}{4}$ - особое решение, так как оно удовлетворяет уравнению.

Метод получения особых решений при известном общем решении.

Пусть известен общий интеграл уравнения
$\Phi(t,y,c)=0$.
Это семейство решений. Особое решение есть огибающая этого семейства, т.е. огибающая в каждой своей точке касается некоторой интегральной кривой уравнения. Условиями для огибающей будет система

$$\begin{cases}\Phi(t,y,c)=0\ ;\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial c}=0.\end{cases}$$

Исключая c, получим c-дискриминантную кривую $\varphi(t,y)=0$. Это особое решение, т.к. функция $\varphi(t,y)=0$ является решением дифференциального уравнения, и в каждой точке нарушается единственность решения.
Для того, чтобы разрешить $\Phi(t,y,c)=0$ относительно $y=y(t,c)$ (или $t=t(y,c)$), необходимо, чтобы одновременно не обращались в ноль $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}$,т.е. должно быть выполнено условие

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\neq 0.$$

Однако точки $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$ могут входить в огибающую, т.к.

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t}dt + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial c}dc = 0 \quad ,$$

следовательно, при $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ и $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$ имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 \ .$$

Чтобы исключить эти точки, мы должны записать условия существования особого решения в виде

$$\begin{cases} \Phi(t, y, c) = 0 \ ; \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 \ ; \\ \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 \neq 0 \end{cases} \tag{9.4}$$

Для примера рассмотрим то же уравнение

$$(y')^2 - ty' + y = 0.$$

Общий интеграл уравнения

$$\Phi(t, y, c) = y - ct + c^2 = 0$$

(т.к. общее решение $y = c(t - c)$) .

Так как $\dfrac{\partial \Phi}{\partial c} = -t + 2c \, . \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = -c; \quad \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 1,$

то особое решение находим из системы (9.4)

$$\begin{cases} y - ct + c^2 = 0, \\ -t + 2c = 0, \\ 1+\mathrm{c}^2 \neq 0. \end{cases}$$

Откуда имеем $c = \dfrac{t}{2}$, а c - дискретная кривая

$y = \dfrac{t}{2}t - \dfrac{t^2}{4} = \dfrac{t^2}{4}$, $\qquad y = \dfrac{t^2}{4}$ - особое решение.

Задачи к I главе.

1.Могут ли графики двух решений уравнения $y^{(n)}(t) = t + y^2,\ n = 1,2,3$ касаться друг друга в точке (t_0, y_0) на плоскости $t0y$?

2. Сколько существует решений уравнения $y^{(n)}(t) = t + y^2,\ n = 1,2,3$, удовлетворяющих условиям $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$?

3. Сколько производных имеют решения уравнений: $y' = t + y^{7/3};\ y' = t|t| - y^2;\ y' = y^2 + t^{4/3};\ y' = t^{1/3}$ в окрестности точки $t = 0;\ y(t = 0) = 0.$

4. Решить задачу Коши для уравнений, не разрешенных относительно производной:

4.1 $$\begin{cases} y'^2 + (3t - 2y)y' + (2t - y)t - 3y^2 = 0,\ t \in [0, T] \\ y(0) = 1;\ y'(0) = -3. \end{cases}$$

4.2 $$\begin{cases} y'^2 + ty' - (t + y)\bullet y = 0,\ t \in [0, T] \\ y(0) = 1;\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

4.3 $$\begin{cases} y'^2 \cos t + y'(1 - y\cos t) - y = 0,\ t \in [0, \pi / 2] \\ y(0) = 0;\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

5. Методом введения параметра решить задачи Коши:

5.1 $$\begin{cases} 9y\bullet y'^2 + 4t^3 y' - 4t^2 \bullet y = 0,\ t \in [0, T] \\ y(0) = 1;\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

5.2 $$\begin{cases} t'^3 - ty^4 y' - y^5 = 0,\ t \in [0, T] \\ y(0) = 1;\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

5.3 $$\begin{cases} y' \sin y' = t,\ t \in [0, \pi / 2] \\ y(0) = 1;\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

5.4 $$\begin{cases} ty' - 2\sqrt{y'} - y = 0,\ t \in [0, T] \\ y(0) = 1;\ y'(0) = 1 / 4. \end{cases}$$

6. Найти особые решения для уравнений:

6.1 $(y'+1)^3 = 27(y+t)^2.$

6.2 $y'^3 - yy'(y'+1) + y^2 = 0.$

6.3 $y'^2(3y-2)^2 + 4(y-1) = 0.$

7. Найти особые решения дифференциального уравнения, если известно его общее решение

7.1 $y(t) = ct^2 - c^2$

7.2 $y(t) = c^2 / (c-t)$

7.3 $y(t) = c^2(c-t)^2$

ГЛАВА II
Системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

§10.Задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений.

Ранее были рассмотрены вопросы существования и единственности решения для одного дифференциального уравнения. Теперь мы рассмотрим эти вопросы применительно к нормальной системе дифференциальных уравнений.

Пусть нам дана вектор функция

$$\bar{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3, \ldots, y_n(t)).$$

В общем случае система дифференциальных уравнений, разрешенная относительно производных, имеет вид:

$$\hat{A}\bar{y}'(t) = F(t, y'), \quad t \in \; t_0, t_0 + T \quad , \qquad (10.1)$$

где матрица $\hat{A} = \; a_{ij}(t)$.Если $Det\,\hat{A} \neq 0$ при $t \in \; t_0, t_0 + T$, то систему (10.1) модно свести к нормальному виду:

$$\bar{y}'(t) = \bar{f}(t, \bar{y}), \qquad (10.2)$$

где $\bar{f}(t, \bar{y}) = A^{-1}F(t, \bar{y})$.

Решение нормальной системы (10.2) зависит от «n» констант. Поэтому необходимо задать «n» начальных условий. Это означает, что в задаче Коши должно быть задано «n» значений функций $\bar{y}(t_0) = \bar{y}^0$. Таким образом, задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} \bar{y}'(t) = \bar{f}(t, \bar{y}),\ t \in \ t_0, t_0 + T \\ \bar{y}(t_0) = \bar{y}^0 \end{cases} . \qquad (10.3)$$

Нам необходимо определить, при каких условиях на $\bar{f}(t, \bar{y})$ решение задачи Коши (10.3) существует и единственно.

Заметим, что имея доказательство существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы, мы получаем доказательство существования и единственности решения задачи Коши для уравнения n-ого порядка, разрешенного относительно старшей производной, которая ставится следующим образом:

$$\begin{cases} y^n(t) = \varphi(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), t \in \ t_0, t_0 + T \\ y(t_0) = y_0; y'(t_0) = y_0'; \dots; y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \qquad (10.4)$$

Покажем, что задачу (10.4) можно свести к задаче (10.3).

***Т е о р е м а* 10.1 Задача Коши для уравнения n-ого порядка (10.4) эквивалентна задаче Коши для нормальной системы:**

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{u}(t)}{dt} = \bar{f}(t, \bar{u}), \quad t \in \ t_o, t_0 + T \ ; \\ \qquad \bar{u}(t_0) = \bar{u}_0 \end{cases} , \qquad (10.5)$$

где $\bar{u}(t) = \ u_i(t) \ ,\ u_i(t) = y^{(i-1)}(t),\ i \in [1, n];$

$$\overline{f}(t,\overline{u}) = \quad f_i(t) \quad, \ f_i(t,\overline{u}) = u_{i+1}(t), \ \text{при } i \in [1, n-1];$$
$$f_n = \varphi(t,\overline{u}).$$

Доказательство.

Пусть существует решение задачи (10.4), т.е. существует n раз дифференцируемая функция $y(t)$, которая при подстановке в уравнение (10.4) превращает его в тождество. Следовательно, мы можем ввести вектор- функцию:

$$\overline{u}(t) = \quad u_i(t) \quad, \ u_i(t) = y^{(i-1)}(t), \ i \in [1, n].$$

(10.6)

Тогда при $i \in [1, n-1]$

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{d}{dt}(y^{(i-1)}(t)) = y^{(i)}(t) = u_{i+1}(t),$$

а при $i = n$ имеем

$$\frac{du_n}{dt} = \frac{d}{dt}(y^{(n-1)}(t)) = y^{(n)}(t).$$

Следовательно, согласно уравнению (10.4), получаем

$$\frac{du_n}{dt} = \varphi(t,\overline{u}).$$

В результате получаем, что построенная нами вектор- функция $\overline{u}(t)$ является решением задачи (10.5). Следовательно, любое решение задачи (10.4) порождает решение задачи (10.5). Рассмотрим теперь эквивалентность задач в обратную сторону.

Пусть существует решение задачи (10.5), т.е. существует ветор-функция $\overline{u}(t)$, компоненты которой связаны соотношением

$$u_i'(t) = u_{i+1}(t), i \in [1, n-1] \qquad (10.7)$$

и $\quad u_n'(t) = \varphi(t, \overline{u})$.

Тогда существует функция $y(t) = u_1(t)$. При этом производные этой функции, согласно (10.7), равны

$$y^{(k)}(t) = u_1^{(k)} = u_{k+1}(t);\ k \in [1, n-1]$$

$$y^n(t) = u_n'(t) = \varphi(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)).$$

Следовательно, получили решения задачи (10.4). Таким образом, любое решение задачи (10.5) порождает решение задачи (10.4). Эквивалентность задач (10.4) и (10.5) доказана.

Теорема доказана.

§11. Сведение задачи Коши для нормальной системы к системе интегральных уравнений. Теорема единственности решения.

Так же как и для уравнения первого порядка будем доказывать существование и единственность решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений, переходя к эквивалентной системе интегральных уравнений. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 11.1. Задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{y}}{dt} = \overline{f}(t, \overline{y}), \ t \in \ t_0, t_0 + T \\ \overline{y}(t = t_0) = \overline{y}^{(0)} \end{cases}$$

эквивалентна системе интегральных уравнений

$$y_m(t) = y_m^0 + \int_{t_0}^{t} f_m(\tau, y_1(\tau), \ldots, y_n(\tau))d\tau. \quad m \in 1, n$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть существует решение задачи Коши для нормальной системы (11.1) $\overline{y}(t)$. Подставив его в систему дифференциальных уравнений, получим тождество, которое можем проинтегрировать. В результате получим систему интегральных уравнений (11.2). Следовательно, любое решение задачи (11.1) является решением задачи (11.2).

Аналогично доказывается эквивалентность в обратную сторону.

Пусть существует решение системы интегральных уравнений (11.2) $\overline{y}(t)$. Подставив его в систему, получим тождество, из которого, продифференцировав, получим систему дифференциальных уравнений (11.1).Причем, при $t = t_0$из системы интегральных уравнений следует, что $\overline{y}(t_0) = \overline{y}^0$. Таким образом показано, что $\overline{y}(t)$ является решением задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений (11.1).

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь, какие условия должны выполняться, чтобы существовало единственное решение задачи Коши для нормальной системы (11.1). На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Т е о р е м а **11.1. Если** $\bar{f} = f_m(t, y_1, \ldots, y_n)$ **для всех** $m \in [1, n]$ **удовлетворяет условиям:**

1) непрерывности по всем аргументам в области $D: (|t - t_0| \le T;\ |y_m - y_m^0| \le b)$ ($b -$ **одно и то же для** $m \in 1, n$);

2) условию Липшица при $\bar{y} \in D$,

$$|f_m(t, \bar{y}') - f_m(t, \bar{y}'')| \le K\ |y_1' - y_1''| + \ldots + |y_n' - y_n''|$$

для всех $m \in [1, n]$,**то решение задачи Коши** $\bar{y}(t)$ **для нормальной системы дифференциальных уравнений единственно на отрезке** $|t - t_0| < h$, **где**

$$h = \min(T, b/M),\ |f_m| < M .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Нам необходимо доказать единственность решения нормальной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{y}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{y}),\ t \in t_0, t_0 + T \\ \bar{y}(t = t_0) = \bar{y}^{(0)} \end{cases} \tag{11.1}$$

которой соответствует эквивалентная система интегральных уравнений

$$y_m(t) = y_m^0 + \int_{t_0}^{t} f_m(\tau, y_1(\tau), \ldots, y_n(\tau))d\tau, \qquad (11.2)$$

$$m \in 1, n$$

Доказательство единственности решения аналогично доказательству теоремы 7.1, только нужно учитывать векторный характер решения.

Пусть есть два решения системы интегральных уравнений

$$\bar{y}^{(1)} = \ y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}$$

$$\bar{y}^{(2)} = \ y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)} y \quad ,$$

у которых не все y_m^1 равны y_m^2. Тогда не равна нулю функция отклонения решений

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{n} \left| y_m^{(1)} - y_m^{(2)} \right| \qquad (11.3)$$

$$y_m^{(1)} - y_m^{(2)} = \int_{t_0}^{t} \ f_m(\tau, \bar{y}^{(1)}) - f_m(\tau, \bar{y}^{(2)}) \ d\tau \quad (11.4)$$

Для оценки $\left| y_m^{(1)} - y_m^{(2)} \right|$ мы используем условие Липшица для $\bar{f}(t, \bar{y}(t))$. Однако, условие Липшица, согласно условиям теоремы, справедливо при $\bar{y} \in D$. Покажем, что при $|t - t_0| < h$, $h = \min(T, b/M)$ решение системы интегральных уравнений принадлежит области *D*.

Из (11.2) следует

$$\left|y_m(t) - y_m^{(0)}\right| \le \int_{t_0}^{t} \left| f_m(\tau, \bar{y}(\tau))\right| d\tau \le M(t - t_0) \le$$

$$\le Mh \le M \min(T, b/M) \le b.$$

Это означает, что $\bar{y} \in D$.

Теперь мы можем провести оценку (11.4).

Используя условие Липшица для $f_m(t, y)$, получим

$$\left| f_m(\tau, \bar{y}^{(1)}) - f_m(\tau, \bar{y}^{(2)})\right| \le K\Phi(\tau).$$

Следовательно,

$$\left|y_m^{(1)} - y_m^{(2)}\right| \le K \int_{t_0}^{t} \Phi(\tau) d\tau\,.$$

Тогда, просуммировав по всем *m*, получим

$$0 \le \Phi(t) \le Kn \int_{t_0}^{t} \Phi(\tau) d\tau\,/$$

Из полученного неравенства, согласно следствию к лемме Гроноулла - Беллмана имеем $\Phi(t) \equiv 0$. Это означает, что $\bar{y}^{(1)} = \bar{y}^{(2)}$.

Следовательно, доказана единственность решения интегрального уравнения (11.2). Т.к. интегральное уравнение эквивалентно задаче Коши (11.1), то доказана единственность решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений.

Отметим, что теорема доказана для t в окрестности t_0, где выполняется условие $|t - t_0| < h$.

§12. Теорема существования решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений.

На вопрос о существовании решения задачи Коши (11.1) отвечает следующее утверждение.

Т е о р е м а **12.1. Если правая часть системы (11.1) удовлетворяет условиям теоремы 11.1, то решение задачи Коши (11.1) существует.**

Для доказательства существования решения задачи Коши (11.1) мы докажем существование решения системы интегральных уравнений (11.2), которая эквивалентна задаче Коши. В предположении существования решения построим итерационный процесс последовательных приближений для всех компонент $\bar{y}(t)$ решения системы интегральных уравнений

$$y_m^{(s)}(t) = y_m^{\ 0} + \int_{t_0}^{t} f_m(\tau, \bar{y}^{(s-1)}(\tau))d\tau, \tag{12.1}$$

$$s \in [1, \infty), m \in \overline{1, n}$$

Отметим, что последовательность функций, получаемых в итерационном процессе $\bar{y}^{(s)}(t) \in D$, если выполняется условие $|t - t_0| < h, h = \min(T, b/M)$, т.к.

$$\left| y_m^{(s)}(t) - y_m^{(0)} \right| \leq \int_{t_0}^{t} f(\tau, \bar{y}(\tau)) d\tau \leq M(t - t_0) \leq Mh \leq b.$$

Для того, чтобы доказать сходимость последовательных приближений, достаточно доказать сходимость функционального ряда:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \; y_m^{(s)}(t) - y_m^{(s-1)}(t) \quad , \tag{12.2}$$

т.к.

$$y_m^{(s)}(t) = \sum_{k=1}^{s} \; y_m^{(k)}(t) - y_m^{(k-1)}(t) \; + y_m^{(0)} \; . \tag{12.3}$$

Проведем оценку слагаемого ряда (12.2)

$$\begin{aligned} &\left| y_m^{(s)}(t) - y_m^{(s-1)}(t) \right| \leq \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \left| f_m(\tau, \bar{y}^{(s-1)}(\tau)) - f_m(\tau, \bar{y}^{(s-1)}(\tau)) \right| d\tau \end{aligned} \tag{12.4}$$

Используя условия Липшица для $f_m(t, \bar{y})$, получим

$$\begin{aligned} &\left| y_m^{(s)}(t) - y_m^{(s-1)}(t) \right| \leq \\ &\leq K \sum_{m=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \left| y_m^{(s-1)}(\tau) - y_m^{(s-2)}(\tau) \right| d\tau \end{aligned} \; . \tag{12.5}$$

Используя оценки (12.4) и (12.5), получим последовательно оценки членов функционального ряда (12.2)

$$\left| y_m^{(1)}(t) - y_m^{(0)} \right| \leq M(t - t_0) \leq Mh;$$

$$\left|y_m^{(2)}(t)-y_m^{(1)}(t)\right| \le K\sum_{m=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\left|y_m^{(1)}(\tau)-y_m^{(0)}(\tau)\right|d\tau \le$$

$$\le M\,\frac{nK(t-t_0)^2}{2} \le Mh\frac{nKh}{2};$$

$$\left|y_m^{(3)}(t)-y_m^{(2)}(t)\right| \le M\,\frac{nK}{2}nK\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)d\tau \le$$

$$\le M\,\frac{(nK)^2(t-t_0)^3}{2\bullet 3} \le Mh\frac{(nKh)^2}{2\bullet 3};$$

В общем случае имеет

$$\left|y_m^{(s)}(t)-y_m^{(s-1)}(t)\right| \le Mh\frac{(nKh)^{s-1}}{s!} \quad . \qquad (12.6)$$

Таким образом, мы построили мажорантный ряд для функционального ряда (12.2)

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left|y_m^{(s)}(t)-y_m^{(s-1)}(t)\right| \le Mh\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(nKh)^{s-1}}{s!} = Mh\sum_{s=1}^{\infty}V_s \ (12.7)$$

Мажорантный ряд сходится по признаку Даламбера

$$\lim_{s\to\infty}\frac{V_{s+1}}{V_s} = \lim_{s\to\infty}\frac{nKh}{s+1} = 0 < 1$$

Следовательно, по признаку Вейерштрасса, функциональный ряд (12.2) сходится абсолютно и равномерно при $\left|t-t_0\right| \le h$. Это означает, что существует предел последовательности приближений (12.1) системы интегральных уравнений

$$\lim_{s\to\infty} y_m^{(s)} = Y_m(t). \qquad (12.8)$$

Аналогично теореме 7.2 легко доказать, что $Y_m(t)$ является решением системы интегральных уравнений (11.2), т.к.

$$\lim_{s\to\infty}\int_{t_0}^{t} f_m(\tau,\overline{y}^{(s)}(\tau))d\tau = \int_{t_0}^{t} f_m\left(\tau,\overline{Y}_m(\tau)\right)d\tau\ .$$

Доказано, что существует решение системы интегральных уравнений (11.2). Согласно лемме 11.1, система интегральных уравнений эквивалентна задаче Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений (11.1).Следовательно, существует решение задачи Коши.

Теорема доказана.

Доказав теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений, мы легко можем перенести этот результат на задачу Коши для уравнения *n-ого* порядка, разрешенного относительно производной.

Т е о р е м а **12.2. Решение задачи Коши для уравнения *n-ого* порядка, разрешенного относительно старшей производной**

$$\begin{cases} \dfrac{d^n y}{dt^n} = \varphi\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right); \quad t\in\left[t_0, t_0+T\right]; \\ \quad y = y_0, y'(t_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \qquad (12.9)$$

существует и единственно, если его правая часть $\varphi\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ **удовлетворяет условиям :**

1) непрерывности по всем аргументам;
(12.10)
2) условию Липшица по аргументам
$(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.
Согласно тереме 10.1, задача (12.9) эквивалентна задаче Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений (10.5), правая часть которой равна

$$\overline{f}(t, \overline{u}(t)) = \quad f_i \quad ,$$
$$f_i = u_{i+1} \text{ при } i \in [1, n-1],$$
$$f_n = \varphi(t, \overline{u}); \overline{u} = \quad u_i = y^{(i-1)}(t), i \in [1, n] \quad .$$

Проверим, удовлетворяет ли эта правая часть условиям теоремы 12.1. Заметим, что при $i \in [1, n-1]$ f_i является линейной функцией от u_{i+1} и, следовательно, является непрерывной функцией , удовлетворяющей условию Липшица. При $i = n$ $\quad f_n(t, \overline{u}) = \varphi(t, \overline{u})$, которая является непрерывной по по $(t, \overline{u})$ и удовлетворяет условию Липшица по $\overline{u}$, согласно условиям теоремы 12.2. Следовательно, решение системы (10.5) существует и единственно. В силу эквивалентности существует и единственно решение задачи Коши для уравнения *n-ого* порядка (12.9).

Теорема доказана.

§13. Непрерывность решений дифференциальных уравнений по начальным данным и параметрам.

Нам необходимо рассмотреть вопрос об устойчивости решения задачи Коши, что входит в понятие корректной постановки задачи. Это означает, что малые изменения правой части уравнения и начальных данных приводят к малым изменениям решения задачи Коши.

Задачу Коши всегда можно свести к задаче, имеющей параметры только в правой части. Пусть дана задача Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = F(t,U,\nu_1), & 0 < t < T, \\ U(t=0) = U_0(\nu_2), & |y - y_0| \le A. \end{cases},$$

в которой параметры ν_1 и ν_2 входят как в правую часть, так и в начальные данные.

Введем $y(t) = U(t) - U_0$, тогда получим

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y,\overline{\mu}), 0 < t < T \\ y(t=0) = 0, \quad |y| \le a \end{cases} \qquad \left| \begin{aligned} f &= F(t, y + U_0(\nu_2), \nu_1) \\ \overline{\mu} &= (\nu_1, \nu_2) \end{aligned} \right. \qquad (13.1)$$

Теперь параметры входят только в правую часть уравнения. Достаточно рассмотреть один параметр μ.

Справедливо следующее утверждение.

***Т е о р е м а* 13.1. Если в задаче Коши (13.1) $f(t,y,\mu)$ непрерывна по всем аргументам в области $D:\ 0 \le t < T, |y| \le a, |\mu - \mu_0| \le b$ и удовлетворяет по переменной y условию Липшица**

$$\left|f(t,y_1,\mu)-f(t,y_2,\mu)\right|\le K\left|y_1-y_2\right|$$

всюду в D, причем K не зависит от t и μ, то решение задачи (13.1) $y=y(t,\mu)$ определено в D и непрерывно по t и μ.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Нам необходимо доказать, что при $\Delta\mu\to 0$ приращение решения $\Delta y=y(t,\mu+\Delta\mu)-y(t,\mu)\to 0$. Согласно задаче 13.1, имеем

$$\frac{dy(t,\mu+\Delta\mu)}{dt}=f\left(t,y(t,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu\right);$$

$$\frac{dy(t,\mu)}{dt}=f\left(t,y(t,\mu),\mu\right);\ y(t_0,\mu)=0;$$

откуда

$$\begin{cases}\dfrac{d\Delta y}{dt}=f\left(t,y(t,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu\right)-\\ \qquad -f\left(t,y(t,\mu),\mu\right)\\ \Delta y(t_0)=0;\ \Delta y=y(t,\mu+\Delta\mu)-y\left(t,\mu\right)\end{cases}\tag{13.2}$$

Следовательно, имеем эквивалентное интегральное выражение

$$\Delta y=\int_{t_0}^{t}\{f(\tau,y(\tau,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu)-f(\tau,y(\tau,\mu),\mu)\}d\tau$$

или

$$\Delta y = \int_{t_0}^{t} \Big(f(\tau, y(\tau, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) -$$

$$- f(\tau, y(\tau, \mu), \mu + \Delta\mu)\Big) + \qquad (13.3)$$

$$+ \quad f(\tau, y(\tau, \mu), \mu + \Delta\mu) - f(\tau, y(\tau, \mu), \mu) \quad d\tau$$

Используя условия Липшица по y, мы можем оценить первую скобку в (13.3) в виде

$$f(\tau, y(\tau, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(\tau, y(\tau, \mu), \mu + \Delta\mu) \le K\Delta y$$

а используя непрерывность функции $f(t, y, \mu)$ по μ, получим оценку для второй скобки

$$f(\tau, y(\tau, \mu), \mu + \Delta\mu) - f(\tau, y(\tau, \mu), \mu) \le \varepsilon(\delta),$$

где $|\Delta\mu| \le \delta$; $\varepsilon(\delta) \underset{\delta \to 0}{\to} 0$.

Отсюда из (13.3) имеем оценку

$$|\Delta y| \le K \int_{t_0}^{t} |\Delta y| d\tau + (t - t_0)\varepsilon(\delta) .$$

Применяя к полученному неравенству лемму Гронуолла – Беллмана, получаем

$$|\Delta y| \le K\varepsilon(\delta) \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0) e^{k(t-\tau)} d\tau + (t - t_0)\varepsilon(\delta) \le C\varepsilon(\delta) .$$

Следовательно, решение непрерывно зависит от параметра μ, т.к.

$$|\Delta y| \le C\varepsilon(\delta) \text{ при } |\Delta\mu| \le \delta,\ \varepsilon(\delta) \to 0 \text{ при } \delta \to 0 \qquad (13.4)$$

Теорема доказана.

Таким образом, мы полностью исследовали корректность постановки задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений. Было показано, что при выполнении определенных условий на правую часть системы решение существует, единственно и устойчиво к малым изменениям правой части и начальным данным при $\left|t-t_0\right| \le h$.

§14. Регулярное и сингулярное возмущения системы дифференциальных уравнений.

При математическом моделировании часто приходится описывать процессы и явления, в которых существуют малые параметры, влияющие на протекание процесса. Например, учет влияния вязкости газа и т.п. Таким образом, изменение такого малого параметра можно рассматривать как возмущение начальной задачи. Исследованием возмущений задач занимается теория возмущений. При этом мы имеем:

невозмущенная задача

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(y,t,\mu=0), \quad 0<t<T \ , \\ y(t=0)=0 \end{cases} \tag{14.1}$$

возмущенная задача

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(y,t,\mu), \quad 0<t<T \ , \\ y(t=0)=0 \qquad \left|\mu\right| \le \varepsilon. \end{cases} \tag{14.2}$$

Естественно, возникает вопрос: как связано возмущенное решение с невозмущенным?
Теория возмущений исследует асимптотику $y(t,\mu)$ при $\mu \to 0$

Определение 14.1 ***Регулярным возмущением*** задачи Коши называется такое возмущение параметра μ, что $f(y,t,\mu)$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности, и при $\mu \to 0$ эти условия не нарушаются, а $f(y,t,\mu)$ разлагается в степенной ряд по μ. Для регулярно возмущенных задач выполняются следующие теоремы.

Т е о р е м а **14.1 Если правая часть в задаче Коши (14.1) $f(t,y,\mu)$ непрерывна по всем переменным вместе с частными производными по y,μ в D, то существует производная от решения по параметру μ непрерывная в D. При этом $\frac{\partial y}{\partial \mu} = U$ удовлетворяет задаче Коши**

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y}U + \frac{\partial f}{\partial \mu}, \\ U(t_0) = 0\ . \end{cases} \tag{14.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Аналогично доказательству теоремы 13.1, мы можем из выражения (13.2), разделив его на $\Delta\mu$, получить

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta y}{\Delta\mu}\right)=\frac{f(t,y(t,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu)-f(t,y(t,\mu),\mu+\Delta\mu)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta\mu}+$$

$$+\frac{f(t,y(t,\mu),\mu+\Delta\mu)-f(t,y(t,\mu),\mu)}{\Delta\mu}$$

Так как существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial\mu}$, то, обозначив $\frac{\Delta y}{\Delta\mu}=U$, из (14.4) получаем для U задачу Коши:

$$\begin{cases}\dfrac{dU}{dt}=\dfrac{\partial f}{\partial y}U+\dfrac{\partial f}{\partial\mu}\ , \\ U(t_0)=0\ . \end{cases} \qquad (14.5)$$

Правая часть задачи линейна по U и непрерывна по t и U, следовательно, решение (14.5) существует и единственно, причем непрерывно зависит от $\Delta\mu$. Следовательно, существует

$$\frac{\partial y}{\partial\mu}=\lim_{\Delta\mu\to 0}U\ ,$$

так как $\varepsilon(\Delta\mu)\to 0$ при $\Delta\mu\to 0$.

Теорема доказана.

Без доказательства приведем теорему о разложении решения возмущенной задачи по малому параметру μ.

Т е о р е м а **14.2. Пусть в области** $D:(t_0 < t < t_0 + T, |y - y_0| \le a, |\mu| \le \varepsilon)$ **функция** $f(t, y, \mu)$ **обладает непрерывными и равномерно ограниченными частными производными по** y и μ **до порядка (n+1) включительно. Тогда существует сегмент** $\left[t_0; t_0 + T\right]$, **на котором для решения** $y(t,\mu)$ **возмущенной задачи (14.2) справедливо асимптотическое представление**

$$y(t,\mu) = y(t,0) + \mu\frac{\partial y(t,0)}{\partial \mu} + \ldots + \frac{\mu^n}{n!}\frac{\partial^n y(t,0)}{\partial \mu^n} + O(\mu^{n+1}) \tag{14.6}$$

Чтобы получить разложение решения возмущенной задачи (14.2) по малому параметру μ, используют следующую процедуру. Пусть правая часть уравнения (14.2) удовлетворяет условиям теоремы 14.2 для $n = 2$. Тогда мы можем разложить ее по параметру μ:

$$f(y,t,\mu) = f(y_0,t,\mu = 0) + \mu\left(\frac{\partial f}{\partial \mu} + y_1\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Bigg|_{\substack{\mu=0\\ y=y_0}} +$$

$$+\frac{\mu^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial y} + y_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2y_2\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Bigg|_{\substack{\mu=0\\ y=y_0}} + O(\mu^3) \tag{14.7}$$

где $y_i(t),\ i \in [0,2]$ определяют разложения решения по параметру μ:

$$y(t,\mu) = y_0(t) + \mu y_1(t) + \mu^2 y_2(t) + O(\mu^3) \ . \qquad (14.8)$$

Подставив (14.7) и (14.8) в задачу (14.2) и приравняв члены с одинаковой степенью μ, получим задачи для определения $y_i(t)\,, i \in [0,2]$:

$$1.\begin{cases} y_0' = f(y_0, t, \mu = 0), \ t \in [0,T] \\ y_0(t=0) = 0. \end{cases}$$

$$2.\begin{cases} y_1' = \left.\dfrac{\partial f(y_0, t, \mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} + \dfrac{\partial f(y_0, t, \mu = 0)}{\partial y_0}, \ t \in [0,T] \\ y_1(t=0) = 0 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} y_2' = y_1 \dfrac{\partial f(y_0, t, \mu = 0)}{\partial y_0} + \dfrac{1}{2}\left(\left.\dfrac{\partial^2 f(y_0, t, \mu)}{\partial \mu^2}\right|_{\mu=0} \right| \\ + 2y_1 \left.\dfrac{\partial^2 f(y_0, t, \mu = 0)}{\partial y_0 \partial \mu}\right|_{\mu=0} + y_1^2 \dfrac{\partial^2 f(y_0, t, \mu = 0)}{\partial y_0^2} \Bigg), t \in [0,T] \\ y_2(t=0) = 0 \end{cases}$$

Заметим, что только невозмущенная задача 1 является в общем случае нелинейной. Задачи 2 и 3 являются линейными задачами для $y_1(t)$ и $y_2(t)$. Решив задачи 1,2 и 3, получим разложение (14.8) для $y(t)$ по параметру μ.

Определение 14.2 ***Сингулярное возмущение*** задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(y,t,\mu), \quad t \in [0,T], \\ y(t=0) = y_0, \qquad |\mu| \le \varepsilon \end{cases}$$

возникает, если $f(y,t,\mu)$ при $\mu \to 0$ имеет нерегулярность, т.е.ведет себя особым (сингулярным) образом. Это, например, $f \to \infty$ при $\mu \to 0$ или

$\dfrac{\partial f}{\partial y} \to \infty$ при $\mu \to 0$

Наиболее частый и практически важный случай - это малый параметр при старшей производной

$$\mu\, y_{(t)}^{(n)} = F(t, y, y', \dots y^{(n-1)}) \qquad (14.9)$$

или, соответственно, система с малым параметром при одной производной

$$\begin{cases} \mu \dfrac{dy_1}{dt} = F_1(t, \bar{y}) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, \bar{y}); \\ \dots\dots. \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n(t, \bar{y}). \end{cases} \qquad (14.10)$$

Ясно, что при $\mu \to 0$ имеем, что

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{\mu} F_1(t, y) = f_1(t, y, \mu) \to \infty \ .$$

Это означает, что не выполняются условия теоремы единственности и существования решения для нормальной системы.

Задачи к II главе

1. Свести к нормальной системе следующие системы дифференциальных уравнений:

1.1 $\begin{cases} x''(t) = y \\ y''(t) = x \end{cases}$

1.2 $\begin{cases} x'''(t) = e^{y} \\ y'(t) = x^2 \end{cases}$

1.3 $\begin{cases} x' + 2y' = x^2 \\ 3x' + y' = y^2 \end{cases}$

2. Свести к нормальной системе следующие дифференциальные уравнения:

2.1 $x''' + 3xx'' + 2x^2x'^2 + x^3 = 0$

2.2 $(x'')^2 - 3x'^2 - 4x^2 = 0$

3.Свести к уравнению высшего порядка следующие системы дифференциальных уравнений:

3.1 $\begin{cases} x'(t) = x^2 / y \\ y'(t) = x / 2 \end{cases}$

3.2 $\begin{cases} x'(t) = (y-1) / y \\ y'(t) = 1/(x-t) \end{cases}$

4. Найти производную по параметру или по начальным данным для следующих задач Коши:

4.1 $y'(t) = y + \mu(y^2 + t), y(0) = 1, t \in [0, T]$.

Определить $\partial y / \partial \mu$ при $\mu = 0$.

4.2 $y'(t) = y + y^2 + ty^3, y(0) = p.$

Определить $\partial y / \partial p$ при $p = 0$.

4.3 $y'(t) = y^2 + \mu t y^3, y(0) = 1 + \mu, t \in [0, T]$.

Определить $\partial y / \partial \mu$ при $\mu = 0$.

4.4 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xy + t^2,\ t \in [0, T] \\ \dfrac{dy}{dt} - -y^2,\ \ x(0) = p,\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Определить $\partial y / \partial \mu$ при $\mu = 0$.

5. Найти три члена разложения решения по малому параметру μ задач Коши:

5.1 $y'(t) = -y^2 + \mu t, t \in [1, 2], y(1) = 1$

5.2 $t \bullet y'(t) = \ln y + \mu t^2, t \in [1, 2], y(1) = 1$

5.3 $y'(t) = e^{y-t} + \mu y, t \in [0, 1], y(0) = -\mu$

5.4 $$\begin{cases} x'(t) = x + \mu(x^2 - y^2),\ t \in [0, 1] \\ y'(t) = y - \mu(x^2 + y^2),\ x(0) = 1,\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ГЛАВА III
Линейные дифференциальные уравнения.

§15.Линейное дифференциальное уравнение и его свойства.

Линейным дифференциальным уравнением называется уравнение, в котором задается линейная комбинация искомой функции и ее производных. Порядок уравнения определяется старшей производной. Если линейный дифференциальный оператор n-ого порядка обозначить $L_n(y(t))$, то получим уравнение в виде:

$$L_n(y)=\sum_{k=0}^{n}a_k(t)y^{(n-k)}(t)=f\ \ t\ \ ,a_0(t)\neq 0,t\in\ \ t_0,t_0+T\ \ .$$

Разделив уравнение на $a_0(t)\neq 0$, получим стандартный вид уравнения

$$L_n(y)=\sum_{k=0}^{n}p_k(t)y^{(n-k)}(t)=f\ \ t\ \ ,p_0(t)=1. \qquad (15.1)$$

Если $f\ \ t\ \ \equiv 0$, то уравнение называется однородным. В случае $f\ \ t\ \ \neq 0$ имеем неоднородное уравнение. Задача Коши для линейного уравнения имеет вид:

$$\begin{cases} L_n(y)=f(t),\, t\in[t_0,t_0+T] \\ y(t_0)=y_0,\ y'(t_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0)=y_0^{(n-1)} \end{cases} \qquad (15.2)$$

Основным свойством линейного уравнения является выполнение принципа суперпозиции, суть которого состоит в выполнении утверждения:

Т е о р е м а **15.1. Для линейного дифференциального уравнения выполняется принцип суперпозиции**

$$L_n\left(\sum_{k=1}^{m} c_k y_k\right) = \sum_{k=1}^{m} c_k L_n(y_k),\ c_k = const \qquad (15.3)$$

Доказательство этого утверждения базируется на утверждении, что производная от линейной комбинации функций равно линейной комбинации производных:

$$\frac{d^s}{dt^s}\left(\sum_{k=1}^{m} c_k y_k(t)\right) = \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{d^s y_k(t)}{dt^s}$$

Данное свойство дает выполнение (15.3).

Для линейного уравнения мы получаем существование и единственность решения задачи Коши (15.2) в целом для всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ в отличие от нелинейного уравнения, где существование и единственность решения выполняется в окрестности начальной точки.

Т е о р е м а **15.2.Если в линейном уравнении коэффициенты $p_k(t), k \in [0, n]$ и правая часть $f(t)$ являются непрерывными функциями при** $t \in [t_0, t_0 + T]$, то решение задачи Коши (15.2) существует и единственно при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Так как $p_0(t) = 1$ при $t \in [t_0, t_0 + T]$, то мы можем записать задачу Коши (15.2) в виде

$$\begin{cases} y^n(t) = \varphi(t, y, y', .., y^{(n-1)}) = f(t) - \sum\limits_{k=1}^{n} p_k y^{n-k}(t) \\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \qquad (15.4)$$

Тогда, в соответствии с теоремой (12.2), решение задачи (15.4) существует и единственно при выполнении условий (12.10). Заметим, что правая часть уравнения в (15.4) линейно зависит от $(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, поэтому условия (12.10) выполняются при всех значениях $(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, а, следовательно, условия (12.10) выполняются при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$. Отсюда следует, что решение задачи Коши (15.2) существует и единственно при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Теорема доказана.

Выполнение принципа суперпозиции для линейного уравнения позволяет упрощать решение задачи Коши для неоднородного уравнения (15.2), разделив ее на две задачи:

1. Задача для однородного уравнения с произвольными начальными данными

$$\begin{cases} L_n(y_1) = 0, \; t \in [t_0, t_0 + T] \\ y_1(t_0) = y_0, \; y_1'(t_0) = y_0', \; \ldots, \; y^{(n-1)}{}_1(t_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{15.5}$$

2. Задача для неоднородного уравнения с нулевыми начальными данными

$$\begin{cases} L_n(y_2) = f(t), \; t \in [t_0, t_0 + T] \\ y_2(t_0) = 0, \; y_2'(t_0) = 0, \; \ldots, \; y_2{}^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases} \tag{15.6}$$

Тогда решение задачи (15.2) равно

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \tag{15.7}$$

Решение задачи для однородного уравнения с произвольными начальными данными (15.5) можно представить в виде

$$y = \sum_{m=1}^{n} U_m(t) y_0^{(m-1)} \quad , \tag{15.8}$$

где функции $U_m(t)$ являются решениями следующих задач:

$$\begin{cases} L(U_m) = 0 \\ U_m^{(k)}(t_0) = 0 \;\; k \in \overline{0, n-1}, k \neq m \\ U_m^{(m)}(t_0) = 1 \end{cases} . \tag{15.9}$$

Рассмотрим теперь вопрос: при каких заменах переменных линейность уравнения сохраняется?

***Т е о р е м а* 15.3. Линейность уравнения сохраняется при замене переменного $t = \varphi(\tau)$, где $\varphi(\tau)$ n – раз непрерывно дифференцируемая функция и $\varphi(\tau) \neq 0$ при $t \in [t_0, t_0 + T]$. Линейность уравнения сохраняется также при линейном преобразовании решения.**

$y(t) = \alpha(t) z(t) + \beta(t)$, где $\alpha(t), \beta(t)$ заданные n – раз дифференцируемые функции $\alpha(t) \neq 0$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1.Пусть в уравнении (15.1) сделана замена переменного $t = \varphi(\tau)$. Тогда производные функции $y(t) = y(\varphi(\tau))$ будут равны:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\varphi'(\tau)} \frac{dy}{d\tau};$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{\varphi'(\tau)} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\varphi'(\tau)} \frac{dy}{d\tau} \right) = \frac{1}{(\varphi'(\tau))^2} \frac{d^2 y}{d\tau^2} - \frac{\varphi''(\tau)}{(\varphi'(\tau))^3} \frac{dy}{d\tau}$$

и т.д. Все производные по t будут линейными

комбинациями производных по τ, причем порядок производных по t совпадает с максимальным порядком производных по τ.
Подставив полученные выражения производных в уравнение (15.1)и приведя подобные члены, получим линейное дифференциальное уравнение по τ также порядка n.
2. Пусть в уравнении (15.1) сделана замена искомой функции в виде:

$$y(t) = \alpha(t)z(t) + \beta(t) \ .$$

Тогда производные функции $y(t)$ будут иметь вид:

$$y' = \alpha\ z' + \alpha' z + \beta',\ y'' = \alpha\ z'' + 2\alpha' z' + \alpha'' z + \beta''$$

и т.д. Подставив полученные выражения в уравнение (15.1) и приведя подобные члены, получим линейное уравнение для функции $y(t)$.

Теорема доказана.

§16. Общая теория линейных однородных уравнений *n*-го порядка.

В теории линейных уравнений важную роль играет понятие линейно независимых функций.

Определение 16.1 Функции $y_i(t)$, $i \in \overline{1,n}$ называются ***линейно зависимыми*** на отрезке $t \in [t_0, t_0 + T]$, если существуют постоянные c_i $, i \in [1,n]$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t) = 0 \text{ при } t \in [t_0, t_0 + T], \qquad (16.1)$$

причем $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \neq 0$. Если же тождество (16.1) выполняется только при $c_i = 0, i \in [1,n]$, то функции $y_i(t)$ называются ***линейно независимыми*** при $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Т е о р е м а **16.1.Если функци $y_i(t)$, $i \in 1,n$ линейно зависимы на отрезке $t \in [t_0, t_0 + T]$, то на этом отрезке тождественно равен нулю определитель Вронского**

$$\Delta(t) = \Delta(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \ldots, & y_n \\ y_1', & y_2', & \ldots, & y_n' \\ - & - & - & - \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, & \ldots, & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \equiv 0 \quad (16.2)$$

при $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Т.к. $y_i(t)$ линейно зависимые функции при $t \in [t_0, t_0 + T]$, то существуют константы c_i $, i \in [1,n]$, причем есть c_i отличные от нуля, такие, что выполняется тождество

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t) \equiv 0 \text{ при } t \in [t_0, t_0 + T]. \qquad (16.3)$$

Продифференцировав тождество (16.3) (n-1) раз, получим

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i y_i'(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_0 + T] \\ - - - - - - - - \\ \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)}(t) = 0, \ t \in [t_0, t_0 + T] \end{cases} \qquad (16.4)$$

Выражения (16.3) и(16.4) представляют собой линейную систему алгебраических однородных уравнений для c_i. Т.к. существуют отличные от нуля решения системы c_i, то определитель этой системы должен быть равен нулю. Следовательно, выполняется условие (16.2).

Теорема доказана.

Если функции $y_i(t)$ являются решениями одного и того же однородного уравнения, то требования к их линейной зависимости упрощаются.

***Т е о р е м а* 16.2. Если $y_i(t)$, $i \in \overline{1,n}$ являются решениями одного и того же однородного линейного дифференциального уравнения**

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(t) y^{(n-k)}(t) = 0, p_0 = 1, \ t \in [t_0, t_0 + T], \qquad (16.5)$$

то, при равенстве нулю определителя Вронского $\Delta(t)$=0 хотя бы для одного значения $t \in [t_0, t_0 + T]$, решения $y_i(t)$ линейно зависимы на всем отрезке $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть в точке t_0 определитель Вронского равен нулю: $\Delta(t_0)$=0. Построим систему линейных алгебраических уравнений относительно констант $c_i \ ,i \in [1,n]$ в виде:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t_0) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} c_i y_i'(t_0) = 0 \\ - - - - - - - - \\ \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases} \tag{16.6}$$

Определитель этой системы равен определителю Вронского $\Delta(t_0)$=0. При определителе равном нулю система (16.6) имеет нетривиальное решение.

Используя полученные c_i , построим решение уравнения (16.5) в виде линейной комбинации решений $y_i(t)$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t),\ t \in [t_0, t_0 + T]\ . \tag{16.7}$$

В соответствии с уравнениями (16.6), можно утверждать, что

$$y(t_0) = 0,\ y'(t_0) = 0,\ ...,\ y^{(n-1)}(t_0) = 0\ . \tag{16.8}$$

Следовательно, $y(t)$ в виде (16.7) является решением однородного линейного уравнения (16.5) с нулевыми начальными данными (16.8). В соответствии с теоремой 15.2 о существовании и единственности задачи Коши получаем

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i y_i(t)\equiv 0 \text{ при } t\in[t_0,t_0+T] \qquad (16.9)$$

Следовательно, функции $y_i(t)$ линейно зависимы при $t\in[t_0,t_0+T]$. *Теорема доказана*

На основе теорем 16.1 и 16.2 можно сформулировать утверждение.

***Т е о р е м а* 16.3(альтернатива). Если** $y_i(t)$, $i\in \overline{1,n}$ **решения однородного линейного уравнения, то либо их определитель Вронского тождественно равен нулю и решения линейно зависимы, либо определитель Вронского не обращается в ноль ни в одной точке, и решения линейно независимы.**

Определение 16.2. Фундаментальной системой решений (Ф.С.Р.) однородного линейного уравнения (16.5) называются любые n линейно независимых решений уравнения (16.5).

***Т е о р е м а* 16.4. Фундаментальная система решений существует.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Рассмотрим систему n функций $y_m(t)$, являющихся решениями задачи Коши для однородного линейного уравнения (16.5) со следующими начальными данными:

$$y_m^{(k)}(t_0)=0 \text{ при } k\neq m,\ k\in[1,n];$$

$$y_m^{(k)}(t_0)=1 \text{ при } k=m. \qquad (16.10)$$

Определитель Вронского такой системы функций $\Delta(t_0)=1\neq 0$.Следовательно, согласно теореме 16.3, эти функции линейно независимы и составляют фундаментальную систему решений.

Фундаментальная система решений неединственна, т.к. можно задавать различные начальные данные для $y_m(t)$ при условии, что определитель Вронского в точке t_0 не равен нулю. Если известна фундаментальная система решений, общее решение однородного линейного уравнения (16.5) можно представить в виде:

$$y(t)=\sum_{m=1}^{n}c_m y_m(t) \qquad (16.11)$$

§17. Решение неоднородного уравнения.

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного линейного уравнения n-ого порядка с произвольными начальными данными:

$$\begin{cases} y^{(n)}(t)+\sum\limits_{k=1}^{n}p_k(t)y^{(n-k)}(t)=f(t),\ t\in[t_0,t_0+T] \\ y^{(m)}(t_0)=y_0^m=const,\ m\in[0,n-1] \end{cases} \qquad (17.1)$$

Как было показано в §15, на основе принципа суперпозиции можно задачу (17.1) разделить на две задачи: задачу для однородного уравнения с произвольными начальными данными

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} p_k(t) u^{(n-k)}(t) = 0, \ t \in [t_0, t_0 + T] \\ u^{(m)}(t_0) = u_0^m, \ m \in [0, n-1] \end{cases} \tag{17.2}$$

и задачу для неоднородного уравнения с нулевыми начальными данными:

$$\begin{cases} v^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} p_k(t) v^{(n-k)}(t) = f(t), \ t \in [t_0, t_0 + T] \\ v^{(m)}(t_0) = 0, \ m \in [0, n-1]. \end{cases} \tag{17.3}$$

Тогда решение задачи (17.1) равно сумме решений задач (17.2) и (17.3)

$$y(t) = u(t) + v(t)$$

Решение задачи (17.2) , как было показано в §16, можно представить в виде :

$$u(t) = \sum_{m=1} y_0^m y_m(t) \ , \tag{17.4}$$

где $y_m(t)$ - фундаментальная система решений однородного уравнения с начальными условиями (16.10). Решение задачи (17.3) получается в виде:

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} K(t,\tau) f(\tau) d\tau \ , \tag{17.5}$$

где функция $K(t,\tau)$ является решением задачи Коши для однородного уравнения по t:

$$\frac{d^n K(t,\tau)}{dt^n}+\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{d^{(n-k)}K(t,\tau)}{dt^{n-k}}=0,\ t\in[t_0,t_0+T] \quad (17.6)$$

с начальными условиями в точке $\tau\in[t_0,t_0+T]$:

$$\begin{aligned}&K(\tau,\tau)=0, K'(\tau,\tau)=0,...,\\ &K^{(n-2)}(\tau,\tau)=0, K^{(n-1)}(\tau,\tau)=1.\end{aligned} \quad (17.7)$$

Функция $K(t,\tau)$ называется импульсной функцией. Она существует в соответствии с теоремой о существовании решения задачи Коши для линейного уравнения.

***Т е о р е м а* 17.1. Выражение (17.5), где функция $K(t,\tau)$ является решением задачи Коши (17.6)-(17.7), является решением задачи (17.2).**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Доказательство проводится прямой проверкой того, что выражение (17.5) является решением задачи (17.3).Для этого продифференцируем (17.5) *n*- раз.

$$v'(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{dK(t,\tau)}{dt}f(\tau)d\tau+K(t,t)f(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{dK(t,\tau)}{dt}f(\tau)d\tau.$$

Аналогично

$$v''(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{d^2K(t,\tau)}{dt^2}f(\tau)d\tau$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$v^{(n-1)}(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{d^{(n-1)}K(t,\tau)}{dt^{n-1}} f(\tau)d\tau$$

$$v^{(n)}(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{d^{(n)}K(t,\tau)}{dt^{n}} f(\tau)d\tau + f(t)K^{(n-1)}(t,t) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{d^{(n)}K(t,\tau)}{dt^{n}} f(\tau)d\tau + f(t).$$

Из полученных соотношений имеем $v^{(m)}(t_0) = 0$ при $m \in [0, n-1]$, т.е. начальные условия задачи (17.2) выполняются. Если подставить полученные выражения в уравнение, получим

$$v^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} p_k(t) v^{(n-k)}(t) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} (K^n(t,\tau) + \sum_{k=1}^{n} p_k(t) K^{(n-k)}(t,\tau)) f(\tau)d\tau + f(t).$$

Т.к. функция $K(t,\tau)$ удовлетворяет однородному уравнению (17.6), то получаем, что $v(t)$, определенная в виде (17.5), удовлетворяет неоднородному уравнению задачи (17.2).

§18. Восстановление дифференциального уравнения по известной фундаментальной системе решений. Формула Остроградского- Лиувилля.

Рассмотрим вопрос о восстановлении линейного однородного уравнения (16.5) , если известна его фундаментальная система решений $y_i(t)$, $i \in \overline{1,n}$ **.** Это означает, что нам известен порядок уравнения, следовательно, искомое уравнение имеет вид:

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) y^{(n-i)}(t) = 0, \; t \in [t_0, t_0 + T], \qquad (18.1)$$

Т.е. нам необходимо определить коэффициенты уравнения $\{p_i(t)\}, i \in \overline{1,n}$ по известной фундаментальной системе решений $y_i(t)$, $i \in \overline{1,n}$ **.**

***Т е о р е м а* 18.1. По известной фундаментальной системе решений можно однозначно восстановить линейное дифференциальное уравнение (18.1).**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Решения из фундаментальной системы удовлетворяют однородному уравнению, следовательно

$$y_m^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) y_m^{(n-i)}(t) = 0, \; m \in [1, n].$$

Откуда получаем для $\{p_i(t)\}$ алгебраическую систему линейных дифференциальных уравнений при $t \in [t_0, t_0 + T]$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) y_m^{(n-i)}(t) = -y_m^{(n)}(t) \text{ при } m \in [1, n]. \quad (18.2)$$

Определитель этой системы является определителем Вронского системы функций $y_m(t)$. Т.к. функции

$y_m(t)$ линейно независимы, то их определитель Вронского не равен нулю при любом $t \in [t_0, t_0 + T]$. Следовательно, $\{p_i(t)\}, i \in \overline{1,n}$ однозначно определяются из системы (18.2).

Теорема доказана.

Для получения уравнения (18.1) существует простой метод. Зная фундаментальную систему решений, можно представить общее решение уравнения как линейную комбинацию функций $y_i(t)$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t).$$

Следовательно, Ф.С.Р. $y_i(t)$ и $y(t)$ линейно зависимы, и их определитель Вронского равен нулю

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2, & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ - & - & - & - & - \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{n} \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая определитель Вронского по элементам последнего столбца, получим

$$\Delta(y_1,\dots,y_n)y^{(n)}-\begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \dots, & y_n \\ y_1', & y_2', & \dots, & y_n' \\ - - - & - - - & - - - & - - - \\ y_1^{(n-2)}, & y_2^{(n-2)}, & \dots, & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{n}, & y_2^{n}, & \dots, & y_n^{n} \end{vmatrix} y^{(n-1)}+\dots=0 \quad 18.1$$

Т.к. определитель Вронского для $y_i(t)$ не равен нулю, то мы получим дифференциальное уравнение *n*-ого порядка, которое имеет фундаментальную систему решений $y_i(t)$.

Пример.

Дана фундаментальная система решений $y_1(t)=e^{-t^2}$; $y_2(t)=t$ при $t\in[t_0,t_0+T]$. Построить дифференциальное линейное однородное уравнение, которое имеет такую Ф.С.Р.

Решение.

Проверим, что функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ линейно независимы.

$y_1'(t)=-2te^{-t^2}$; $y_2'(t)=1$. Следовательно, определитель Вронского при $t=0$ равен $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$

Запишем уравнение в виде

$$\Delta(y_1, y_2, y) = \begin{vmatrix} e^{-t^2} & t & y \\ -2te^{-t^2} & 1 & y' \\ 2(2t^2-1)e^{-t^2} & 0 & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда находим

$$(1+2t^2)y''(t) + 2t(2t^2-1)y'(t) - 2(2t^2-1)\,y(t) = 0.$$

Заметим, что из уравнения (18.1) следует

$$p_1(t) = \frac{1}{\Delta(y_1 \dots y_n)} \bullet \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ - & - & - & - \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{n} & y_2^{n} & \dots & y_n^{n} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\Delta(y_1 \dots y_n)} \bullet \frac{d\Delta(y_1 \dots y_n)}{dt}$$

Откуда получаем

$$\frac{d\Delta}{\Delta} = -p_1(t)dt \text{ или } \Delta = \Delta(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} P_1(\tau)d\tau}. \qquad (18.2)$$

Это формула Остроградского-Лиувилля, определяющая $\Delta(t)$ через первый коэффициент уравнения.

§19. Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$L_n(y)=$$

$$=y^{(n)}(t)+\sum_{k=1}^{n}p_k y^{(n-k)}(t)=0, t\in\ t_0,t_0+T \qquad (19.1)$$

При постоянных коэффициентах (p_k =*const*) решение уравнения (19.1) можно представить в виде: $y(t)=e^{\lambda t}$. Подставив $y=e^{\lambda t}$ в уравнение (19.1), получим:

$$M_n(\lambda)=\lambda^n+\sum_{k=1}^{n}p_k\lambda^{n-k}=0 \qquad (19.2)$$

Полином *n*-ой степени $M_n(\lambda)$ называется характеристическим полиномом, а уравнение (19.2)-характеристическим уравнением. Корни уравнения (19.2) дают нам характеристические числа λ_i , $i\in[1,n]$. Возможны следующие случаи:

1. Простые действительные характеристические числа.
2. Кратные действительные характеристические числа.
3. Комплексные характеристические числа.

В первом случае имеем *n* различных λ_m , $m\in[1,n]$,а,

следовательно, имеем *n* решений уравнения

$$y_m = e^{\lambda_m t},\ m \in [1, n] \tag{19.3}$$

Докажем, что эти функции линейно независимы, и, следовательно, составляют фундаментальную систему решений. Для этого предположим, что y_m линейно зависимы. Тогда существуют c_m такие, что

$$\sum_{m=1}^{n} c_m y_m(t) = 0. \tag{19.4}$$

При этом хотя бы одно c_m отлично от нуля. Без потери общности можно считать $c_1 \neq 0$. Подставив в (19.4) функции (19.3), получим

$$\sum_{m=1}^{n} c_m e^{\lambda_m t} = 0 \text{ или } \sum_{m=1}^{n} c_m e^{(\lambda_m - \lambda_n)t} = 0.$$

Продифференцировав последнее выражение, получим

$$\sum_{m=1}^{n-1} (\lambda_m - \lambda_n) c_m e^{(\lambda_m - \lambda_n)t} = 0$$

или $\displaystyle\sum_{m=1}^{n-1} (\lambda_m - \lambda_n) c_m e^{(\lambda_m - \lambda_{n-1})t} = 0$.

Продифференцировав, найдем

$$\sum_{m=1}^{n-2} c_m (\lambda_m - \lambda_n)(\lambda_m - \lambda_{n-1}) e^{(\lambda_m - \lambda_{n-1})t} = 0.$$

Продолжая этот процесс, получим окончательно

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_1 - \lambda_{n-1})...(\lambda_1 - \lambda_2) e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} = 0.$$

Т.к. все характеристические числа различны, получаем $c_1 = 0$, что противоречит исходному утверждению о линейной зависимости y_m. Таким образом, доказано, что $y_m = e^{\lambda_m t}$ линейно независимы и составляют фундаментальную систему решений в случае простых корней характеристического уравнения.

При простых корнях характеристическое уравнение записывается в виде

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)...(\lambda - \lambda_n) = 0 . \quad (19.5)$$

Рассмотрим теперь случай кратных корней характеристического уравнения, которое в этом случае имеет вид:

$$M(\lambda) = \prod_{i=1}^{l}(\lambda - \lambda_i)^{m_i} = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2}...(\lambda - \lambda_l)^{m_l} = 0, \quad (19.6)$$

где m_i - кратность корня λ_i, причем $\sum_{i=1}^{l} m_i = n.$

Покажем, что для корня λ_i существуют следующие решения дифференциального уравнения

$$y_{i1} = e^{\lambda_i t}, y_{i2} = te^{\lambda_i t}, ... y_{im_i} = t^{m_i - 1}e^{\lambda_i t}, \ i \in [1, l] \quad (19.7)$$

Покажем, что функции (19.7) являются решениями дифференциального уравнения (19.1).

Лемма. Справедливо тождество

$$L_n[e^{\lambda t} \bullet u(t)] = e^{\lambda t}\{M(\lambda)u(t) + M'(\lambda)u'(t) +$$

$$\frac{M''(\lambda)}{2!}u''(t) + \ldots + \frac{M^{(n)}(\lambda)}{n!}u^{(n)}(t)\} \qquad (19.8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Воспользуемся формулой Лейбница для дифференцирования произведения

$$\frac{d^n}{dt^n}(v(t) \bullet u(t)) = \sum_{k=0}^{n} c_n^k v^{(n-k)}(t) \bullet u^{(k)}(t); c_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

.

Тогда последовательно можем записать производные от $e^{\lambda t} \bullet u(t)$:

$$e^{\lambda t} \bullet u(t) = e^{\lambda t} \bullet u(t)$$

$$(e^{\lambda t} \bullet u(t))' = e^{\lambda t}(\lambda u + \frac{d\lambda}{d\lambda}u')$$

$$(e^{\lambda t} \bullet u(t))'' = e^{\lambda t}(\lambda^2 u + \frac{1}{1!}\frac{d\lambda^2}{d\lambda}u' + \frac{1}{2!}\frac{d^2\lambda^2}{d\lambda^2}u'')$$

- -

$$(e^{\lambda t} \bullet u(t))^{(n)} = e^{\lambda t}(\lambda^n u + \frac{d\lambda^n}{d\lambda}u' + \ldots + \frac{1}{k!}\frac{d^k\lambda^k}{d\lambda^k}u^{(k)}$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!}\frac{d^n\lambda^n}{d\lambda^n}u^{(n)})$$

Подставив полученные произведения в уравнение (19.1), найдем (19.8)

Лемма доказана.

Следствие. Если λ_i **- корень характеристического уравнения (19.6) кратности** m_i**, то** $L_n(t^s e^{\lambda_i t}) = 0$ **при** $s \in [0, m_i - 1]$**.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Подставим $t^s = u(t)$ в (19.8). Т.к. $\dfrac{d^k t^s}{dt^k} = 0$ при $k \geq s + 1$, то получим

$$L_n(t^s e^{\lambda_i t}) = e^{\lambda_i t}\{M(\lambda_i)t^s + \ldots + \frac{(t^s)^{m_i - 1}}{(m_i - 1)} \frac{d^{m_i - 1} M(\lambda_i)}{d\lambda^{m_i - 1}}\}.$$

Т.к. λ_i имеет кратность m_i, то все производные $M^{(k)}(\lambda_i)$=0 при $k \in [0, m_i - 1]$. Следовательно, получаем

$$L_n(t^s e^{\lambda_i t}) = 0 \text{ при } s \in [0, m_i - 1].$$

Таким образом, доказано, что система функций (19.7) является решением дифференциального уравнения $L_n(y_{ik}(t)) = 0$. Если мы докажем, что функции (19.7) линейно независимы, то это будет означать что система функций (19.7) образует фундаментальную систему решений.

Доказательство линейной независимости функций (19.7) проводится также как и для случая простых корней. Нам дана система функций $y_{ik} = t^k e^{\lambda_i t}$, $k \in [0, m_i - 1]$, $i \in [1, l]$, где m_i - кратность корня λ_i.

Предположим, что существуют c_{ik} не все равные нулю такие, что

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=0}^{m_i-1} c_{ik} y_{ik}(t) = 0 \text{ при } t \in t_0, t_0 + T \quad , \qquad (19.9)$$

т.е. функции $y_{ik}(t)$ линейно зависимы. Будем считать, что максимальная по «*k*» константа c_{ik} отличная от нуля есть $c_{ip_i} \neq 0,\ p_i \leq m_i - 1$. Тогда (19.9) запишется в виде:

$$\sum_{i=1}^{l}(\sum_{k=0}^{p_i} c_{ik} t^k) e^{\lambda_i t} = 0,\ c_{1p_1} \neq 0. \qquad (19.10)$$

Перепишем (19.10) в виде:

$$\sum_{i=1}^{l-1}(\sum_{k=0}^{p_i} c_{ik} t^k) e^{(\lambda_i - \lambda_l)t} = -\sum_{k=0}^{p_l} t^k .$$

Тогда, продифференцировав ($p_l + 1$) раз по t получим

$$\frac{d^{(p_l+1)}}{dt^{(p_l+1)}}(\sum_{i=1}^{l-1}(\sum_{k=0}^{p_i} c_{ik} t^k) e^{(\lambda_i - \lambda_l)t} = 0.$$

После дифференцирования по формуле Лейбница, получим:

$$\sum_{i=1}^{l-1}(\sum_{k=0}^{p_i} B_{ik} t^k) e^{(\lambda_i - \lambda_l)t} = 0 \text{, где } B_{1p_1} = (\lambda_i - \lambda_l)^{p_l+1} \bullet c_{1p_1} .$$

Проделав такую процедуру l-1 раз, получим

окончательно $\sum_{k=0}^{p_1} D_{1k} t^k = 0,$ где

$$D_{1p_1} = (\lambda_1 - \lambda_2)^{p_2+1} ... (\lambda_1 - \lambda_l)^{p_l+1} \bullet c_{1p_1} .$$

Т.к. согласно равенству полинома нулю все его коэффициенты равны нулю, имеем D_{1p_1} =0. Следовательно, c_{1p_1} =0, т.к. все λ_i различные. Пришли к противоречию. Следовательно, функции $y_{ik}(t)$ линейно независимы и составляют фундаментальную систему решений.

Осталось рассмотреть случай комплексных корней характеристического уравнения. Заметим, что при действительных коэффициентах дифференциального уравнения (19.1) комплексные корни характеристического уравнения (19.2) могут появляться сопряженными парами.

Если есть корень $\lambda_m = \mu_m + i\nu_m$, то обязательно есть корень $\lambda_{m+1} = \mu_m - i\nu_m$.

Соответственно, имеем две сопряженные функции

$$y_m = e^{(\mu_m + i\nu_m)t} = e^{\mu_m t}\cos\nu_m t + ie^{\mu_m t}\sin\nu_m t$$
$$y_{m+1} = e^{(\mu_m - i\nu_m)t} = e^{\mu_m t}\cos\nu_m t - ie^{\mu_m t}\sin\nu_m t\ .$$

Действительная и мнимая части этих функций являются решениями уравнения, и, введя новые функции $y_m = e^{\mu_m t}\cos\nu_m t$; $y_{m+1} = e^{\mu_m t}\sin\nu_m t$, получим новую фундаментальную систему решений. Таким образом, зная корни характеристического уравнения, мы всегда можем определить фундаментальную систему решений для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

§20.Восстановление дифференциального уравнения по корням характеристического уравнения.

Выше в §18 мы рассмотрели, как можно восстановить дифференциальное уравнение, если известна фундаментальная система решений. Однако, в случае уравнения с постоянными коэффициентами, возможен более простой метод. Дело в том, что задание Ф.С,Р, в этом случае автоматически определяет характеристические числа и их кратность.

Если решение дифференциального уравнения имеет вид полинома, умноженного на экспоненту, то λ_i - это показатель в экспоненте, а его кратность равна $m_i = p+1$, где p – максимальная степень в полиноме. Например: если дано решение $y(t) = t^2 e^{3t}$, то это означает, что есть корень характеристического уравнения $\lambda = 3$ кратностью 3. Конечно, кроме этой функции, имеются еще решения e^{3t} и te^{3t}; если дано решение $y(t) = P_m(t)$ - полином степени m, то имеем $\lambda = 0$ кратности m . В случае, если в решении появляются $\sin\nu t$ или $\cos\nu t$, то это означает, что есть комплексные характеристические числа.

Например, имеем решение $te^{2t}\cos 3t$. Это означает, что имеем комплексные характеристические числа $\lambda_1 = 2+3i, \lambda_2 = 2-3i,$ причем они имеют кратность 2.

Естественно, кроме заданного решения будут еще решения в виде $te^{2t}\sin 3t$, $e^{2t}\cos 3t$, $e^{2t}\sin 3t$.

Если мы определим все характеристические числа и их кратность, то можно записать характеристическое уравнение в виде (19.6)

$$M(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}...(\lambda-\lambda_l)^{m_l} = 0, \sum_{i=1}^{l} m_i = n$$

Возведя в степень и перемножив все сомножители, получим уравнение в виде полинома степени n

$$M(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n = 0 \qquad (20.1)$$

Заменив $\lambda^k = \dfrac{d^k y}{dt^k} = y^{(k)}(t)$, получим уравнение

$$y^{(n)}(t) + p_1 y^{(n-1)}(t) + ... + p_{n-1}y'(t) + p_n y(t) = 0 \qquad (20.2)$$

Таким образом, всегда можно построить уравнение минимального порядка, для которого заданные функции являются решениями.

§21. Теория линейных систем дифференциальных уравнений.

Исследуем теперь свойства линейной системы дифференциальных уравнений.

Определение 21.1. ***Линейной нормальной системой дифференциальных уравнений*** называется нормальная система, правая часть которой линейно зависит от компонент вектор-функции $\overline{y}(t)$ и имеет вид

$$y_i'(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) y_k(t) + f_i, \quad i \in 1,n \qquad (21.1)$$

или

$$\hat{L}_n \overline{y} = \overline{y}' - \hat{A}\overline{y} = \overline{f} \qquad (21.2)$$

где $\hat{A}$ - матрица непрерывных коэффициентов
$\hat{A} = \; a_{ik}(t) \;$, $i,k \in [1,n]$, а $\overline{y}\,(t)$- вектор- столбец
функций $\overline{y}(t) = \; y_i(t) \;$, $i \in [1,n]$.

Т е о р е м а **21.1. Линейность системы дифференциальных уравнений (21.1)сохраняется при замене переменного** $t = \varphi(\tau), \varphi \in C,\ \varphi' \neq 0$ **и при линейном при преобразовании** $\overline{y}(t) = \hat{B}(t)\overline{z}(t) + \overline{b}(t)$**, если** $\hat{B} \neq 0$ **и существует обратная матрица** $\hat{B}^{-1}$**.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть дана линейная система $\overline{y}'(t) - \hat{A}\overline{y} = \overline{f}$, в которой сделана замена переменного $t = \varphi(\tau)$.

Тогда $\quad \overline{y}(t=\varphi(\tau)) = \overline{z}(\tau),$ а $\quad \overline{y}'(t=\varphi(\tau)) = \dfrac{1}{\varphi'(\tau)}\overline{z}'(\tau).$

Следовательно, для $\overline{z}(\tau)$, с учетом $\varphi'(\tau) \neq 0$, мы получим линейную систему

$$\overline{z}'(t) = \hat{D}\overline{z}(t) + \overline{F}(t),$$

где $\hat{D} = \varphi'(\tau)\hat{A}, \;\; \overline{F}(t) = \overline{f}(t=\varphi(\tau))\bullet\varphi'(\tau).$

Рассмотрим теперь линейное преобразование решения

$\overline{y}(t) = \hat{B}(t)\overline{z}(t) + \overline{b}(t), \;\; \hat{B} = \;\; b_{ik}(t) \;\;$.

Тогда

$$\overline{y}'(t) = \hat{B}(t)\overline{z}'(t) + \hat{B}'(t)\overline{z}(t) + \overline{b}'(t)\,\mathbf{.}$$

Подставив эти соотношения в (21.1), получим

$$\hat{B}\overline{z}' + \hat{B}'\overline{z}(t) + \overline{b}'(t) - \hat{A}\hat{B}\,\overline{z} - \hat{A}\overline{b}'(t) = \overline{f}(t)$$

или

$$\hat{B}\overline{z}' - (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}')\overline{z}(t) = \overline{f}(t) - \overline{b}'(t) - \hat{A}\overline{b}(t)\ .$$

Чтобы получить нормальную систему, необходимо обратить матрицу $\hat{B}$. Это возможно, т.к по условию теоремы обратная матрица $\hat{B}^{-1}(t)$ существует.

В результате получаем линейную систему

$$\overline{z}'(t) - \hat{C}(t)\overline{z}(t) = \overline{F}(t),$$

где $\hat{C}(t) = \hat{B}^{-1}(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}'),\; \overline{F}(t) = \hat{B}^{-1}(\overline{f}(t) - \overline{b}'(t) + \hat{A}\overline{b}(t)).$

Теорема доказана

Т е о р е м а **21.2. Если элементы матрицы** $\hat{A} = \;\; a_{ik}(t) \;\;$ **,** $i,k \in [1,n]$ **и правая часть** $\overline{f}(t)$ **системы линейных дифференциальных уравнений является**

непрерывными функциями при $t \in \left[t_0, t_0 + T\right]$ **, то решение задачи Коши**

$$\begin{cases} \overline{y}'(t) = \hat{A}\overline{y}(t) + \overline{f}(t), t \in \left[t_0, t_0 + T\right] \\ \overline{y}(t_0) = \overline{y}^0,\ \hat{A} = \left\| a_{ik}(t) \right\|, i, k \in [1, n] \end{cases} \tag{21.3}$$

существует и единственно на всем интервале $\left[t_0, t_0 + T\right]$ **.**

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из выполнения условий теоремы (11.1) и (12.1) существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений на всем интервале $\left[t_0, t_0 + T\right]$ для любых *y*.

Для линейных систем дифференциальных уравнений справедлив принцип суперпозиции, т.е. если ${}^{(m)}\overline{y}$ - m-ое решение однородной системы $L\left[{}^{(m)}\overline{y}\right] = 0$,то, согласно принципу суперпозиции, их линейная комбинация также является решением однородной системы, т.е.

$$\hat{L}_n\left(\sum_{m=1}^{M} C_m^{(m)}\overline{y}\right) = \sum_{m=1}^{M} C_m \hat{L}_n({}^{(m)}\overline{y}) = 0.$$

Пусть ${}^{(1)}\overline{y}(t), \ldots, {}^{(n)}\overline{y}(t)$ - n решений однородной системы $\hat{L}_n\left[{}^{(m)}\overline{y}\right] = {}^{(m)}\overline{y}' - \hat{A}{}^{(m)}\overline{y} = 0.$ (21.4)

Определение 21.2.*Матрицей решений(матрицантом)* линейной системы называется матрица вида

$$\hat{W}(t) = \begin{Bmatrix} {}^{(1)}y_1,\dots,{}^{(n)}y_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ {}^{(1)}y_n,\dots,{}^{(n)}y_n \end{Bmatrix} = ({}^{(1)}\bar{y},\dots,{}^{(n)}\bar{y}) \qquad (21.5)$$

Легко показать, что матрица решений $\hat{W}(t)$ удовлетворяет матричному уравнению

$$\hat{W}'(t) - \hat{A}\hat{W}(t) = 0 \qquad (21.6)$$

и, обратно, если матрица $\hat{W}(t)$ удовлетворяет уравнению (21.6), то ее столбцы есть вектора, являющиеся решением уравнения (21.4)

Доказательство проводится покомпонентным дифференцированием матрицы $\hat{W}(t)$.

Т е о р е м а **21.3.Если $\hat{W}(t)$ является решением (21.6), то $\bar{y} = \hat{W}\bar{C}$ ($\bar{C}$ - постоянный вектор) удовлетворяет системе (21.4), а $\hat{Z} = \hat{W}\hat{C}$ ($\hat{C}$ - постоянная матрица) удовлетворяет матричному уравнению (21.6).**

Доказательство этого утверждения следует из принципа суперпозиций.

Определение 21.3 . Векторные функции ${}^{(1)}\bar{y}(t),\dots{}^{(n)}\bar{y}(t)$ являются ***линейно зависимы*** на интервале $\tau \;=\; t_{\bar{0}}, t_0 + T$, если существует ненулевой постоянный вектор $\bar{C}$ такой, что выполняется тождество

$$\hat{W}\overline{C} \equiv 0 \quad \text{для любого } t \in \tau . \qquad (21.7)$$

Если условие (21.7) выполняется только при $\overline{C} \equiv 0$, то ${}^{(1)}\overline{y}(t),\ldots,{}^{(n)}\overline{y}(t)$ являются ***линейно независимыми*** функциями при $t \in \tau$.

Определение 21.4 ***Определителем Вронского*** $\Delta(t)$ для системы вектор - функций ${}^{(i)}\overline{y}(t)$, $i \in \overline{1,n}$ называется определитель матрицы

$$\Delta(t) = Det\,\hat{W}(t). \qquad (21.8)$$

Т е о р е м а **21.4. Если решения** ${}^{(k)}\overline{y}$, $k \in \overline{1,n}$ **однородной системы** $\overline{y}' - \hat{A}\overline{y} = 0$ **линейно зависимы при** $t \in \tau$**, то определитель Вронского** $\Delta(t) = 0$ **для любого** $t \in \tau$ **.**

Доказательство.

Согласно определению 21.3, из линейной зависимости функций ${}^{(k)}\overline{y}$ следует существование $\overline{C} \neq 0$ такого, что $\hat{W}\overline{C} = 0$. Это выражение представляет собой линейную однородную систему для $\overline{C}$, решение которой существует при выполнении условия $Det\,\hat{W} = \Delta(t) = 0.$

Теорема доказана.

Т е о р е м а **21.5. Если определитель Вронского** $\Delta(t) = 0$**для решений системы дифференциальных уравнений хотя бы для одного** $t \in \tau$**, то** $\Delta(t) = 0$ **и для любого** $t \in \tau$ **, и , следовательно, решения** ${}^{(k)}\overline{y}$ **линейно зависимы на** τ**.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть при $t = t_0 \in \tau$ определитель Вронского для решений системы дифференциальных уравнений $\Delta(t_0) = 0$.Тогда существует постоянный вектор $\overline{C} \neq 0$, который удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений $\hat{W}(t_0)\overline{C} = 0$. Рассмотрим $\overline{y}(t) = \hat{W}(t)\overline{C}$. Согласно теореме 21.3 $\overline{y}$ является решением задачи Коши с нулевыми начальными данными

$$\begin{cases} \overline{y}' - \hat{A}\overline{y} = 0 \quad t \in \tau \\ \overline{y}(t_0) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\overline{y} \equiv 0$ при $t \in \tau$, согласно теореме единственности решения задачи Коши. Следовательно, $\hat{W}\overline{C} = 0$ для любого $t \in \tau$. Следовательно, определитель системы $\hat{W}\overline{C} = 0$ $Det\hat{W} = \Delta(t) = 0$ для любого $t \in \tau$.

***Т е о р е м а* 21.5.** (альтернатива). **Определитель Вронского $\Delta(t)$ для решений $^{(k)}\overline{y}$, $k \in \overline{1,n}$ однородной системы дифференциальных уравнений или $\Delta(t) \equiv 0$ для любого $t \in \tau$, что означает линейную зависимость $^{(k)}\overline{y}$, или $\Delta(t) \neq 0$ для любого $t \in \tau$ что означает линейную независимость $^{(k)}\overline{y}$.**

Доказательство следует из теорем 21.4 и 21.5 , т.к. если определитель Вронского $\Delta(t)=0$ хотя бы при каком-то t, то он равен нулю и при любом $t\in\tau$. Следовательно, если $\Delta(t)\neq 0$ при некотором t, то $\Delta(t)\neq 0$ и при всех других $t\in\tau$.

§22. Фундаментальная система решений и решение неоднородной линейной системы дифференциальных уравнений.

Определение 21.4 ***Фундаментальной системой*** решений (Ф.С.Р.) однородной системы уравнений называется n линейно независимых решений ${}^{(k)}\bar{y}$, $k\in\overline{1,n}$ этой системы, а соответственно матрица $\hat{W}=\left({}^{(1)}\bar{y},{}^{(2)}\bar{y},\ldots,{}^{(n)}\bar{y}\right)$ называется ***фундаментальной матрицей системы***.

Фундаментальная матрица является решением матричного уравнения

$$\hat{W}'(t)=\hat{A}\hat{W}(t),$$

причем $Det\hat{W}\neq 0.$

Т е о р е м а **22.1. Фундаментальная матрица существует.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Рассмотрим решение задачи Коши для матричного уравнения

$$\begin{cases} \hat{W}'(t) = \hat{A}\hat{W}\ , \quad t \in \tau \\ \hat{W}(t_0) = \hat{E} \end{cases}, \qquad (22.1)$$

где $\hat{E}$ - единичная матрица.

Заметим, что при $t = t_0$ имеем

$$\Delta(t_0) = Det\hat{W}(t_0) = Det\hat{E} \neq 0,$$

Следовательно, согласно теореме 21.6, $\Delta(t) \neq 0$ при любом $t \in \tau$, и решения $\overset{(k)}{\bar{y}}$ - линейно независимы.

Следствие. Существует бесконечно много фундаментальных матриц, т.к. в задаче Коши (22.1) достаточно взять $\hat{W}(t_0) = \hat{C}$, где $Det\hat{C} \neq 0$, и мы получим фундаментальную матрицу.

Т е о р е м а **22.2.Если $\hat{W}(t)$ - фундаментальная матрица для однородной системы, то общее решение этой системы представимо в виде: $\bar{y}(t) = \hat{W}\bar{C}$, где $\bar{C}$ - произвольный постоянный вектор.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Согласно теореме 21.3, $\bar{y}(t) = \hat{W}\bar{C}$ есть решение однородной системы $\bar{y}' = \hat{A}\bar{y}$. Надо показать, что мы можем удовлетворять произвольным начальным данным Коши $\overline{y}(t_0)=\hat{W}(t_0)\overline{C}=\overline{y}^0$. Т.к. $Det\hat{W}(t_0)\neq 0$, то, следовательно, существует $\overline{C}$ для любых $\overline{y}^0$.

Следствие. Решение задачи Коши для произвольных начальных данных $\overline{y}^0$ представимо в виде

$$\overline{y}(t)=\hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(t_0)\overline{y}^0.$$

Доказательство.

Из теоремы 21.3 следует, что $\overline{y}(t)=\hat{W}(t)\overline{C}$. Тогда $\hat{W}(t_0)\overline{C}=\overline{y}^0$. Следовательно, $\overline{C}=\hat{W}^{-1}(t_0)\overline{y}^0$, откуда

$$\overline{y}(t)=\hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(t_0)\overline{y}^0. \qquad (22.2)$$

Определение 22.2. Функция $\hat{Z}(t,t_0)$ являющаяся решением задачи Коши

$$\begin{cases} \hat{Z}'(t)=\hat{A}Z(t), & t\in\tau, \\ \hat{Z}(t_0)=\hat{E}. \end{cases}$$

называется ***импульсной функцией,*** которая выражается через фундаментальную матрицу в виде

$$\hat{Z}(t,t_0)=\hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(t_0) \qquad (22.3)$$

Решение задачи Коши для однородной системы для любых начальных данных $\overline{y}(t_0)=\overline{y}^0$ представимо в виде $\overline{y}(t)=\hat{Z}(t,t_0)\overline{y}^0$ (22.4)

Рассмотрим решение задачи Коши для неоднородной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \hat{L}_n \overline{y}(t) = \overline{y}' - \hat{A}\overline{y} = f(t), t \in [t_0, t_0 + T] \\ \overline{y}(t_0) = y_0 \end{cases}. \qquad (22.5)$$

Согласно принципу суперпозиции, мы можем представить решение задачи (22.5) в виде суммы $\overline{y}(t) = {}^0\overline{y}(t) + \overline{u}(t)$, где ${}^0\overline{y}(t)$ - решение неоднородной системы с нулевыми начальными данными

$$\begin{cases} \hat{L}_n {}^0\overline{y}(t) = f(t), \quad t \in [t_0, t_0 + T] \\ {}^0\overline{y}(t_0) = 0 \end{cases}, \qquad (22.6)$$

а $\overline{u}(t)$- решение однородной системы с заданными начальными данными

$$\begin{cases} \hat{L}_n \overline{u}(t) = f(t), \quad t \in [t_0, t_0 + T] \\ \overline{u}(t_0) = y^0 \end{cases}. \qquad (22.7)$$

Задача (22.7), согласно следствию из теоремы 22.2, имеет решение, которое выражается через импульсную функцию $\hat{Z}(t, t_0)$ в виде

$$\overline{u}(t) = \hat{Z}(t, t_0)\overline{y}^0, \qquad (22.8)$$

где $\hat{Z}(t, t_0) = \hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(t_0)$.

Как определить решение задачи (22.6)?
На этот вопрос отвечает следующее утверждение.

Т е о р е м а **22.3. Частное решение неоднородной системы с нулевыми начальными данными выражается через импульсную функцию в виде**:

$$ {}^{(0)}\bar{y}(t) = \int_{t_0}^{t} \hat{Z}(t,\tau)\bar{f}(\tau)d\tau, \qquad (22.9)$$

а общее решение задачи Коши (22.5) представимо в виде

$$\bar{y}(t) = \hat{Z}(t,t_0)\bar{y}^0 + \int_{t_0}^{t} \hat{Z}(t,\tau)\bar{f}(\tau)d\tau. \quad (22.10)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как решение задачи Коши для однородного уравнения представимо в виде (22.8) $\bar{u}(t) = \hat{Z}(t,t_0)\bar{y}^0$, где $\bar{y}^0$ -начальные данные, то (22.10) получается из (22.8) и (22.9). Поэтому достаточно доказать формулу (22.9).

Формулу (22.9) получается путем вариации постоянной. Представим решение неоднородного уравнения в виде

$$ {}^{0}\bar{y}(t) = \hat{W}(t)\bar{C}(t). \qquad (22.11)$$

Тогда имеем

$$ {}^{0}\bar{y}'(t) = \hat{W}'(t)C(t) + \hat{W}(t)\bar{C}'(t) = \hat{A}\hat{W}(t)C(t) + \bar{f} \quad (22.12)$$

Откуда, учитывая что $\hat{W}' = AW$, имеем тождество $\hat{W}(t)\bar{C}'(t) = f(t)$. Следовательно, для $C(t)$ получаем уравнение первого порядка

$$\bar{C}'(t) = \hat{W}^{-1}(t)f(t). \qquad (22.13)$$

Начальное условие для $C(t)$ находится из условия

$$\bar{y}(t_0) = \hat{W}(t_0)\bar{C}(t_0) = 0.$$

Следовательно, $\bar{C}(t_0)=0$.
Решаем задачу Коши

$$\begin{cases}\dfrac{d\bar{C}}{dt}=\hat{W}^{-1}(t)\bullet \bar{f}(t), \quad t\in[t_0,t_0+T]\\ C(t_0)=0\end{cases}$$

и находим решение в виде

$$\bar{C}(t)=\int_{t_0}^{t}\hat{W}^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau .$$

Подставив полученное $\bar{C}(t)$ в (22.11), получим

$$\bar{y}(t)=\int_{t_0}^{t}\hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau .$$

Т.к. $\hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(\tau)=\hat{Z}(t,\tau)$, то получаем, окончательно, формулу (22.9).
Теорема доказана.

§23. Построение Ф.С.Р. для системы уравнений с постоянными коэффициентами.

В параграфе 22 было показано, что, зная фундаментальную матрицу, можно получить решение задачи Коши для неоднородного уравнения с произвольными начальными данными. Таким образом, все сводится к построению фундаментальной системы решений (Ф.С.Р). Найти Ф.С.Р в аналитическом виде можно для системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\bar{y}'=\hat{A}\bar{y},\ \hat{A}=\|a_{ij}\|=const. \tag{23.1}$$

Частное решение однородной системы (23.1) с постоянными коэффициентами будем искать в виде

$\overline{y}(t)=\overline{\alpha}\ e^{\lambda\, t};\ \ \overline{\alpha}$ - постоянный вектор. (23.2)

Подставив (23.2) в (23.1), получим линейную систему уравнений для $\overline{\alpha}$

$$\left(\hat{A}-\lambda\,\hat{E}\right)\overline{\alpha}=0. \qquad (23.3)$$

Для того чтобы существовало $\overline{\alpha}\neq 0$ как решение однородной системы (23.3) должно выполняться условие

$$Det\left(\hat{A}-\lambda\,\hat{E}\right)=0 \qquad (23.4)$$

Определение 23.1. Определитель матрицы $\hat{A}-\lambda\,\hat{E}$, зависящий от параметра λ, называется ***характеристическим многочленом*** системы дифференциальных уравнений и обозначается

$M(\lambda)=Det\left(\hat{A}-\lambda\,\hat{E}\right)$, а уравнение $M(\lambda)=0$

называется ***характеристическим уравнением***.

Т е о р е м а **23..1. Пусть $\lambda_k,\ k\in\overline{1,n}$ простые корни характеристического уравнения (23.4), а $^{(k)}\overline{y}(t)={}^{(k)}\overline{\alpha}\ e^{\lambda_k t}$, где $^{(k)}\overline{\alpha}$ - нетривиальное решение системы (23.3)**

$$\left(\hat{A}-\lambda_k\hat{E}\right){}^{(k)}\overline{\alpha}=0,\ k\in\overline{1,n} \qquad (23.5)$$

Тогда $^{(k)}\overline{y}(t),\ \ k\in[1,n]$ **образуют Ф.С.Р. системы** дифференциальных уравнений $\overline{y}'=\hat{A}\overline{y}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Функции $^{(k)}y(t) = {}^{(k)}\overline{\alpha}\ \ e^{\lambda_k t}\quad k \in \overline{1,n}$ являются решением системы дифференциальных уравнений. Ф.С.Р. составляют линейно независимые решения. Поэтому достаточно доказать их линейную независимость$\{ {}^{(k)}y(t) \}$.

Для доказательства линейной независимости $\{ {}^{(k)}y(t) \}$необходимо показать, что определитель Вронского для матрицы $\hat{W}(t) = \left\| {}^{(1)}\overline{y}(t),\ldots, {}^{(n)}\overline{y} \right\|$ не равен нулю. Согласно теореме 21.6, достаточно доказать, что определитель Вронского $\Delta(t) = Det\hat{W}(t)$ отличен от нуля хотя бы в одной точке. Рассмотрим $\Delta(t=0)$. В этом случае, согласно (23.2), ${}^{(k)}\overline{y}_{(k)}(t=0) = {}^{(k)}\overline{\alpha}$, где ${}^{(k)}\overline{\alpha}$ - базисные вектора. Они линейно независимы, следовательно, $\Delta(t=0) \neq 0$. Это означает, что $\{ {}^{(k)}y(t) \}$ линейно независимы и составляют Ф.С.Р.

Теорема доказана.

Таким образом, решение систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами свелось к определению корней характеристического уравнения $M(\lambda\ ) = 0$. Если λ - простой и действительный, то мы имеем решение ${}^{(k)}\overline{y} = {}^{(k)}\overline{\alpha}\ \ e^{\lambda_k t}$. Если корень простой , но комплексный, т.е. $\lambda_k = \mu k + i\gamma_k$, которому соответствует комплексный собственный вектор ${}^{(k)}\overline{a} = {}^{(k)}\overline{b} + i\,{}^{(k)}\overline{c}$.

Тогда в этом случае существует и комплексно сопряженный корень характеристического уравнения $\lambda_k{}' = \mu k - i\gamma_k$, которому соответствует комплексно сопряженный собственный вектор ${}^{(k)}\overline{a}' = {}^{(k)}\overline{b} - i\,{}^{(k)}\overline{c}$. Для ${}^{(k)}\overline{b}$ и ${}^{(k)}\overline{c}$ мы имеем действительную систему уравнений для определения ${}^{(k)}\overline{b}$ и ${}^{(k)}\overline{c}$:

$$\hat{A} - \mu\hat{E} \quad {}^{(k)}\overline{b} - \gamma\hat{E}\,{}^{(k)}\overline{c} = 0. \qquad (23.6)$$

$$\hat{A} - \mu\hat{E} \quad {}^{(k)}\overline{c} - \gamma\hat{E}\,{}^{(k)}\overline{b} = 0.$$

В результате получаем два комплексно сопряженных выражения

$${}^{(k)}\overline{y} = ({}^{(k)}\overline{b} + i\,{}^{(k)}\overline{c})e^{\mu_k t}e^{i_\gamma t} =$$
$$= ({}^{(k)}\overline{b} + i\,{}^{(k)}\overline{c})e^{\mu_k t}(\cos\gamma_k t + i\sin\gamma_k t),$$

$${}^{(k)}\overline{y}' = ({}^{(k)}\overline{b} - i\,{}^{(k)}\overline{c})e^{\mu_k t}(\cos\gamma_k t - i\sin\gamma_k t).$$

Отсюда имеем линейно независимые действительные решения для $\lambda_k = \mu k + i\gamma_k$ и $\lambda_k{}' = \mu k - i\gamma_k$.

$${}^{(k)}\overline{y} = {}^{(k)}\overline{b}e^{\mu_k t}\cos\gamma_k t,\ {}^{(k+1)}\overline{y} = {}^{(k)}\overline{c}e^{\mu_k t}\sin\gamma_k t. \qquad (23.7)$$

Рассмотрим теперь случай кратных корней характеристического уравнения. Пусть λ_k - корень характеристического уравнения $Det(\hat{A} - \lambda\hat{E}) = 0$ имеет кратность m_k. Мы знаем из алгебры, что для матрицы с кратным собственным корнем λ_k

собственные вектора ${}^{(j)}\overline{e},\ j \in [1, m_k]$ находятся из жордановой формы

$$\hat{A}^{(1)}\overline{e} = \lambda_k{}^{(1)}\overline{e}$$

$$\hat{A}^{(2)}\overline{e} = \lambda_k{}^{(2)}\overline{e} + {}^{(1)}\overline{e} \tag{23.8}$$

....

$$\hat{A}^{(m_k)}\overline{e} = \lambda_k{}^{(m_k)}\overline{e} + {}^{(m_k-1)}\overline{e}$$

${}^{(1)}\overline{e}$ - собственный вектор, ${}^{(2)}\overline{e}, {}^{(3)}\overline{e}, \ldots, {}^{(m_k)}\overline{e}$ - присоединенные вектора.

Будем строить независимые решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами таким образом, чтобы для векторов, определяющих решения, получалась жорданова форма. Всего мы должны построить m_k решений нашей системы ${}^{(j)}\overline{y},\ j \in [1, m_k]$.

Выберем первое решение в виде

${}^{(1)}\overline{y} = {}^{(1)}\overline{e}\, e^{\lambda_k t}$, где ${}^{(1)}\overline{e}$ - нетривиальное решение алгебраической системы

$$\hat{A}^{(1)}\overline{e} = \lambda_k{}^{(1)}\overline{e}\,. \tag{23.9}$$

Выберем второе решение для $\lambda = \lambda_k$ в виде:

$${}^{(2)}\overline{y} = ({}^{(2)}\overline{e} + {}^{(1)}\overline{e}t)e^{\lambda_2 t}\,.$$

Тогда должно выполняться условие $\hat{A}^{(2)}\overline{y} = {}^{(2)}\overline{y}'$, т.е.

$$\hat{A}({}^{(2)}\overline{e} + {}^{(1)}\overline{e}t)e^{\lambda_k t} = \{\lambda_k({}^{(2)}\overline{e} + {}^{(1)}\overline{e}t) + {}^{(1)}\overline{e}\}e^{\lambda_k t}$$

Получаем

$$\hat{A}^{(2)}\overline{e} - \lambda_k{}^{(2)}\overline{e} - {}^{(1)}\overline{e} + (\hat{A}^{(1)}\overline{e} - \lambda_k{}^{(1)}\overline{e})t = 0\,.$$

Учитывая (23.9), находим уравнение для ${}^{(2)}\overline{e}$:

$$\hat{A}\,{}^{(2)}\overline{e} = \lambda_k\,{}^{(2)}\overline{e} + {}^{(1)}\overline{e}\,. \qquad (23.10)$$

Заметим, что мы получили второе уравнение жордановой формы (23.8).

Если записать j-ое решение для λ_k в виде

$$
\begin{aligned}
{}^{(j)}\overline{y} &= ({}^{(j)}\overline{e} + t\,{}^{(j-1)}\overline{e} + \frac{t^2}{2!}\,{}^{(j-2)}\overline{e} + \ldots + \\
&+ \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\,{}^{(1)}\overline{e})e^{\lambda_k t}; \qquad j \in \overline{1, m_k}
\end{aligned}
\qquad (23.11)
$$

то для ${}^{(j)}\overline{e}$ $\quad j \in [1, m_k]$ получим жорданову форму (23.8). В алгебре известно, что если λ_k - собственное значение матрицы $\hat{A}$ кратностью m_k, то (23.8) дают m_k линейно независимых векторов ${}^{(j)}\overline{e}$. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

***Т е о р е м а* 23.2. Каждому корню характеристического многочлена системы λ_k (кратности m_k) отвечает m_k решений, определенных (23.11), где ${}^{(j)}\overline{e}$ $\;j \in [1, m_k]$ является решением (23.8).**

Таким образом, мы имеем n решений системы линейных дифференциальных уравнений. Остается показать, что они образуют фундаментальную систему решений.

***Т е о р е м а* 23.3. Решения, определенные в теореме 23.2, взятые для всех $k = 1,\ldots l$ $\;(\sum_{k=1}^{l} m_k = n)$ образуют Ф.С.Р.**

Доказательство.

Составим из решений ${}^{(j)}\overline{y}_{(k)}$, $k \in 1, l$, $j \in 1, m_k$ матрицу

$$\hat{W}(t) = {}^{(1)}\overline{y}_1(t) \ldots {}^{(m_1)}\overline{y}_1, \ldots, {}^{(1)}\overline{y}_l, \ldots, {}^{(m_l)}\overline{y}_l \qquad (23.12)$$

Для того, чтобы $\hat{W}(t)$ была фундаментальной матрицей, необходимо доказать, что решения, входящие в нее, линейно независимы. Докажем это.

Заметим, что ${}^{(j)}\overline{y}_{(k)}(t=0) = {}^{(j)}\overline{e}_{(k)}$, тогда определитель Вронского

$\Delta(t=0) = Det\hat{W}(t=0) = Det \; {}^{(j)}\overline{e}_{(k)} \neq 0$ (т.к. ${}^{(j)}\overline{e}_{(k)}$ - линейно независимы).

Согласно теореме 21.5 ,если

$\Delta(t=0) \neq 0$, то $\Delta(t) \neq 0$ для любого $t \in [0, T]$.

Это означает, что решения ${}^{(j)}\overline{y}_{(k)}(t)$ линейно независимы. Следовательно, они составляют Ф.С.Р.

Задачи к III главе.

1. Исследовать, являются ли линейно зависимыми следующие функции:

1.1. $y_1(x) = x + 2;\; y_2(x) = x - 2$

1. $y_1(x) = x^2 - x + 3;\; y_2(x) = 2x^2 + x;\; y_3(x) = 2x - 4$

1.3. $y_1(x) = \sin(x);\; y_2(x) = \cos(x);\; y_3(x) = \sin(2x)$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, если известны некоторые частные решения этого уравнения:

2.1. $\begin{cases} x^3 y'''(x) - 3x^2 y''(x) + 6xy' - 6y = 0 \\ \textit{известны } y_1(x) = x;\ y_2(x) = x^2. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} xy''' - y'' + xy' - y = 0 \\ \textit{известно } y_1(x) = x. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} (1 - x^2)y''' - xy'' + y' = 0 \\ \textit{известно } y_1(x) = x^2. \end{cases}$

3. Как связаны коэффициенты уравнения $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$, если известно, что два его частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ связаны соотношением $y_1 y_2 = 1$. Найти общее решение уравнения.

4. Построить уравнение по известной фундаментальной системе решений.

4.1. $\cos^2 x;\ \sin x$

4.2. $\cos^2 x;\ \sin^2 x$

4.3. $x;\ 1/x$

5. Найти общее решение линейных уравнений:

5.1. $xy'''(x) = (1-x)y''(x)$

5.2. $x^4 y'''(x) + 2x^3 y''(x) = 1$

5.3. $y'' - xy' - y = 1$

6. Найти общее решение уравнений с постоянными коэффициентами:

6.1. $y'' + y' - 2y = 0$

6.2. $y''' - 8y = 0$

6.3. $y^{\mathrm{IV}} + 2y'' + y = 0$

7. Найти общее решение задачи Коши для неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами:

7.1. $\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = e^{4x},\ x \in [0, l] \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$

7.2. $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = \sin x,\ x \in [0, l] \\ y(0) = 0{,}3,\ y'(0) = 1{,}1 \end{cases}$

7.3. $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2^x,\ x \in [0, l] \\ y(0) = 1/a;\ y'(0) = (\ln 2)/a; \\ \qquad a = (\ln 2)^2 - 3\ln 2 + 2 \neq 0 \end{cases}$

8. С помощью метода вариации постоянной найти общее решение уравнения:

8.1. $y'' - y' + y = e^x / x$ *при* $x > 0$

8.2. $x^3(y'' - y') = x^2 - 2$ *при* $x > 0$

8.3. $y'' - y = x^2$

9. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение наименьшего порядка с постоянными коэффициентами, если известно, что заданные функции являются его решениями:

9.1. $y = x^2 e^x$

9.2. $y_1 = xe^x;\ y_2 = e^{2x}$

9.3. $y_1 = x;\ y_2 = \sin x$

9.4. $y_1 = e^x;\ y_2 = sh\,x;\ y_3 = ch\,x$

10. Найти общее решение линейной системы:

10.1. $\begin{cases} x'(t) = x - y \\ y'(t) = y - 4x \end{cases}$

10.2. $\begin{cases} x'(t) = 5x + 3y \\ y'(t) = -3x - y \end{cases}$

10.3. $\begin{cases} x'(t) = x - y + z \\ y'(t) = x + y - z \\ z'(t) = 2x - y \end{cases}$

10.4. $\begin{cases} x'(t) = 2x - y + z \\ y'(t) = x + 2y - z \\ z'(t) = x - y + 2z \end{cases}$

11. Привести систему к нормальному виду и найти общее решение.

11.1. $\begin{cases} x''(t) = 2y \\ y''(t) = -2x \end{cases}$

11.2. $\begin{cases} 2x'(t) - 5y'(t) = 4y - x \\ 3x'(t) - 4y'(t) = 2x - y \end{cases}$

11.3. $\begin{cases} x''(t) - 2y'(t) + 2x = 0 \\ 3x'(t) + y''(t) - 8y = 0 \end{cases}$

12. Найти частное решение линейной неоднородной системы.

12.1. $\begin{cases} x'(t) - y = 2e^t \\ y'(t) - x = t^2 \end{cases}$

12.2. $\begin{cases} x'(t) - y = -5\cos t \\ y'(t) - 2x - y = 0 \end{cases}$

12.3. $\begin{cases} x'(t) - 2y + x = 1 \\ y'(t) + 2x - 3y = 0 \end{cases}$

ГЛАВА IV
Теория устойчивости решения дифференциального уравнения.

§24. Основные понятия теории устойчивости. Устойчивость решения линейной системы.

Мы рассмотрели все свойства дифференциальных уравнений, решение которых определено на конечном интервале $t \in \left[t_0, t_0 + T \right]$. Возникает вопрос, что будет с непрерывностью решения по начальным данным при $t \to \infty$. Эти вопросы исследуются в теории устойчивости. Рассмотрим для примера задачу Коши

$$\begin{cases} y'(t) = ay - 1, \\ y(t=0) = \dfrac{1}{a}, \end{cases}$$

решение которой равно $y_0 = \dfrac{1}{a}$. Изменим начальные данные на малую величину δ. Тогда имеем задачу

$$\begin{cases} y' = at - 1 \\ y(t_0) = \dfrac{1}{a} + \delta \end{cases},$$

решение которой равно $y(t) = \dfrac{1}{a} + \delta e^{at}$. Откуда получаем разность решений этих двух задач $y(t) - y_0 = \delta\ e^{at}$, При конечном значении t имеем непрерывность решения по параметру δ.

$$\left| y(t) - y_0(t) \right| \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0 .$$

Однако, при $t \to \infty$для $\forall \delta > 0$ имеем $(y(t) - y_0) \to 0$, если $a < 0$, и $(y(t) - y_0) \to \infty$ если $a > 0$. Данный пример показывает, что поведение решения возмущенной задачи зависит от параметров задачи. Решение может быть как устойчивым, так и неустойчивым.

Так как для исследования поведения системы дифференциальных уравнений при $t \to \infty$ не зависит от выбора начальной точки t_0, то в дальнейшем будем считать $t \in [0, \infty)$.

При этом исследуется решение $\bar{x}(t) = \bar{y}(t) - y(t=0)$, для которого имеем задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{x}(t)), \quad 0 \le t < \infty \\ \bar{x}(t=0) = 0, \quad (\bar{f}(t, \bar{x}=0) = 0) \end{cases} \tag{24.1}$$

Причем правая часть системы (24.1) удовлетворяет условию $(\bar{f}(t, \bar{x}=0) = 0)$, т.е. $\bar{x}$=0 является решением задачи (24.1).

Решение $\bar{x}$=0 называется ***точкой покоя***. Если возмутить начальное условие задачи (24.1), то получим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{x}(t)), \quad 0 \le t < \infty, \\ \bar{x}(t=0) = x_0, \quad (\bar{f}(t, \bar{x}=0) = 0). \end{cases} \tag{24.2}$$

Теория устойчивости исследует поведение решения задачи (24.2) при $t \to \infty$. Таким образом, вопрос об устойчивости связан с тем, остается ли решение задачи (24.2) на фазовой плоскости в окрестности точки покоя ($\bar{x}$ =0) или уходит от нее.

Определение 24.1. Решение задачи (24.1) $\bar{x}=0$ называется ***устойчивым по Ляпунову***, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при $\|\bar{x}_0\|<\delta(\varepsilon)$ для всех $t>0$ для решения задачи (24.2) справедливо неравенство

$$\|\bar{x}(t,x_0)\|<\varepsilon, \tag{24.3}$$

и ***асимптотически устойчивым,*** если, кроме устойчивости, выполняется условие: существует $\delta_0>0$ такое, что при $\|\bar{x}_0\|<\delta_0<\delta(\varepsilon)$

$$\lim_{t\to\infty}\bar{x}(t,x_0)=0 \tag{24.4}$$

Исследуем устойчивость линейной системы с постоянными коэффициентами. Для исследования необходимо иметь оценку импульсной функции $\hat{Z}(t,t_0)$, которая дается в следующей лемме.

***Лемма* 24.1**. Для импульсной функции

$\hat{Z}(t,t_0)=\hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(t_0)$, где $\hat{W}(t)$ - фундаментальная матрица, справедливо неравенство

$$\left|Z_{ij}(t,t_0)\right|=\left|Z_{ij}(t-t_0,0)\right|<Ce^{(p+\gamma)(t-t_0)}, \tag{24.5}$$

где $p=\max\limits_{k\in 1,n}(\mathrm{Re}\lambda_k)$, γ - положительная постоянная.

Доказательство.

Проведем оценку импульсной функции $\hat{Z}(t,t_0)$, которая , согласно определению 22.2, является решением задачи Коши матричного уравнения

$$\hat{Z}'=\hat{A}\hat{Z},\ t\in[t_0,t_0+T],$$

$$\hat{Z}(t_0)=\hat{E}$$

и выражается через фундаментальную матрицу в виде

$$\hat{Z}(t,t_0) = \hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(t_0).$$

Если мы сделаем замену переменной $\tau = t - t_0$, то для постоянной матрицы $\hat{A}$импульсная функция примет вид

$$\hat{Z}(\tau) = \hat{W}(\tau)\hat{W}^{-1}(0),$$

т.к. фундаментальная матрица является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \hat{W}' = \hat{A}\hat{W}(t_0), \ t \in [t_0, t_0 + T], \\ \hat{W}(t_0) = \hat{E}. \end{cases}$$

В этой задаче можно сделать замену переменной $t = t_0 + \tau$, т.к матрица $\hat{A}$ не зависит от t, и мы получим

$$\begin{cases} \hat{W}'(\tau) = \hat{A}\hat{W}(\tau), \ t \in [0, T], \\ \hat{W}(0) = \hat{E}. \end{cases}$$

Следовательно, имеем

$$\hat{Z}(t - t_0, 0) = \hat{W}(t - t_0).$$

Таким образом, каждый элемент матрицы $\hat{Z}$
оценивается через соответствующий элемент матрицы $\hat{W}$:

$$\left|Z_{ij}(t - t_0)\right| = \left|W_{ij}(t - t_0)\right|.$$

Каждый элемент W_y, согласно (23.11), в общем случае имеет вид

$$W_{ij} = P_{m_k - 1}(t - t_0)e^{\lambda_k (t - t_0)},$$

где $P_{m_k-1}(t-t_0)$ - полином степени не выше m_k-1, где m_k - кратность корня характеристического уравнения λ_k. При $t-t_0\to\infty$ полином растет медленнее, чем экспонента $C\bullet e^{\gamma(t-t_0)}$, где γ - любое положительное число. Таким образом, получаем оценку

$$\left|Z_{ij}\right|=\left|W_{ij}\right|\le C\bullet e^{(p+\gamma)(t-t_0)},$$

где $p=\max\limits_{k\in[1,n]}(\operatorname{Re}\lambda_k)$, т.к.

$$\left|e^{\lambda_k(t-t_0)}\right|\le e^{\operatorname{Re}\lambda_k(t-t_0)}\le e^{p(t-t_0)}.$$

Следовательно, требуемая оценка получена.

Имея оценку импульсной функции $\hat{Z}(t,t_0)$, легко доказать теорему об устойчивости решения системы с постоянными коэффициентами.

***Т е о р е м а* 24.1. Решение линейной системы с постоянными коэффициентами**

$$\begin{cases}\dfrac{d\bar{x}}{dt}=\hat{A}\bar{x},\ t>0;\ \hat{A}=\left\|a_{ij}\right\|,\ a_{ij}=const\\ \bar{x}(t=0)=0\end{cases}\tag{24.6}$$

асимптотически устойчивое, если для всех корней характеристического многочлена выполняется условие

$$\operatorname{Re}\lambda_k<0 \ \textbf{для}\ \forall k,\tag{24.7}$$

и неустойчиво, если хотя бы одно $\operatorname{Re}\lambda_k>0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о .

Для выяснения устойчивости решения задачи (24.6) необходимо представить решение задачи с начальными данными $\bar{x}_0$ с помощью импульсной функции.

Согласно (22.8), решение возмущенной задачи можно представить в виде

$$\overline{x}(t) = \hat{Z}(t,t_0)\bullet\overline{x}_0 .$$

Тогда мы можем записать

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} Z_{ij}(t,t_0)\bullet x_{ij} ,$$

откуда имеем оценку

$$\left|x_i(t)\right| \le \sum_{j=1}^{n}\left|Z_{ij}(t,t_0)\right|\bullet\left|x_{0\,j}\right| .$$

Учитывая оценку импульсной функции (24.5), данную в лемме 24.1

$$\left|Z_{ij}(t,t_0)\right| \le C\bullet e^{(p+\gamma)(t-t_0)} \text{ для любого } i,\, j \in [1,n] ,$$

Получим

$$\left|x_i(t)\right| \le C\bullet e^{(p+\gamma)(t-t_0)}\sum_{j=1}^{n}\left|x_{0\,j}\right| .$$

Пусть $\left\|x_0\right\| = (\sum_{j=1}^{n}\left|x_{0\,j}^2\right|)^{1/2} \le \delta_0$. Тогда $\left|x_{0\,j}\right| \le \delta_0$ для любого j.

Следовательно, имеем оценку

$$\left|x_i(t)\right| \le C\bullet n\bullet\delta_0\bullet e^{(p+\gamma)(t-t_0)}$$

или

$$\left\|\overline{x}(t)\right\| \le C\bullet n^{3/2}\bullet\delta_0\bullet e^{(p+\gamma)(t-t_0)} .$$

Из полученной оценки следует, что если $p = \max\limits_k(\mathrm{Re}\,\lambda_k) < 0$, то $\left\|\overline{x}(t)\right\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Доказана асимптотическая устойчивость решения, если выполнено условие $\max_k(\operatorname{Re}\lambda_k)<0$.

Рассмотрим теперь случай, когда хотя бы одно характеристическое число имеет положительную реальную часть $\operatorname{Re}\lambda_k>0$ при $k=k_0$. Для данного λ_k имеем, согласно (23.11),

$$W_{ij}=P_{m_k-1}(t-t_0)e^{\lambda_k(t-t_0)},$$

где $P_{m_k-1}(t-t_0)$ - полином степени не выше m_k-1. Следовательно,

$$\left|Z_{ik_0}\right|=\left|W_{ik_0}\right|\geq C\bullet e^{\operatorname{Re}\lambda_{k_0}(t-t_0)}.$$

Решение уравнения равно

$$x_i(t)=\sum_{j=1}^{n}Z_{ij}(t,t_0)\bullet x_{0j}.$$

Учитывая полученную выше оценку, найдем

$$\left\|\overline{x}(t)\right\|>Cx_{0k_0}\bullet e^{\operatorname{Re}\lambda_{k_0}(t-t_0)} \tag{24.8}$$

где $x_{0k_0}=x_{k_0}(t=0)$. Если $x_{0k_0}\neq 0$, то

$$\left\|\overline{x}(t)\right\|\to\infty \text{ при } t\to\infty,$$

т.е. решение неустойчиво. Взять $x_{0k_0}=0$ мы не имеем права, потому что решение должно быть устойчивым при любом выборе $\overline{x}_0$, удовлетворяющем условию $\left\|\overline{x}_0\right\|\leq\delta$. Следовательно, оно должно выполняться и при условии $x_{0k_0}=\delta\neq 0$.

Теорема доказана.

Когда мы рассматривали устойчивость решения задачи (24.1), мы считали, что $\bar{f}(t, \bar{x} = 0) = 0$, т.е. $\bar{x} = 0$является решением задачи (24.1). Это означает, что мы рассматриваем устойчивость нулевого решения $\bar{x} = 0$ (точка покоя). Однако, возможен случай, когда существует решение задачи (24.1) $\bar{x} = \varphi(t)$:

$$\begin{gathered} \frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{x}), t \in [0, \infty], \\ \bar{x}(t = 0) = \bar{\varphi}(t = 0), \end{gathered} \tag{24.9}$$

причем $\bar{f}(t, \bar{\varphi}) = 0$.

Тогда возникает задача об устойчивости решения $\bar{\varphi}(t)$. В этом случае вводится функция $\bar{y}(t) = \bar{x} - \varphi(t)$ и получается задача для $\bar{y}(t)$:

$$\begin{gathered} \frac{dy}{dt} = F(t, \bar{y}),\ F(t, \bar{y}) = \bar{f}(t, \bar{y} + \bar{\varphi}) - \bar{f}(t, \bar{\varphi}), \\ \bar{y}(t = 0) = 0. \end{gathered} \tag{24.10}$$

В этом случае $F(t, \bar{y} = 0) = 0$, и мы имеем задачу на устойчивость нулевого решения $\bar{y} = 0$, аналогичную задаче (24.1)

§25. Исследование устойчивости решения автономной системы.

Определение 25.1. ***Автономной системой дифференциальных уравнений*** называется система, правая часть которой не зависит от t.

Таким образом, задача Коши для автономной системы имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = \overline{f}(\overline{x}), \quad t > 0, \quad f(0) = 0, \\ \overline{x}(0) = \overline{x}_0. \end{cases} \qquad (25.1)$$

При нулевых начальных данных ($\overline{x}_0 = 0$) задача (25.1) имеет единственное тривиальное решение $\overline{x} = 0$ (точка покоя).

Исследование автономной системы на устойчивость сводится к исследованию системы с постоянными коэффициентами. Для этого правую часть уравнения приближенно заменяют разложением в ряд Тейлора, ограничиваясь первым членом разложения, т.е., учитывая, что $\overline{f}(\overline{x} = 0) = 0$, получим

$$\overline{f}(\overline{x}) = \hat{A}\overline{x} \qquad (25.2)$$

где $\hat{A} = \left\{ a_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{\overline{x}=0} \right\}.$ (25.3)

В результате получаем линейную систему с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \hat{A}\overline{x}.$$

Исследование такой системы на устойчивость было проведено в параграфе 24 и сводилось к определению корней характеристического уравнения. Если все

$\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$, то решение системы асимптотически устойчиво. Такое исследование устойчивости называется исследованием устойчивости по первому приближению и определяется следующей теоремой.

***Т е о р е м а* 25.1. Пусть в некоторой окрестности точки покоя $\bar{x} = 0$ правая часть автономно системы $\bar{f}(\bar{x})$ непрерывна вместе с производными до второго порядка включительно. Тогда, если все λ_k - характеристические числа матрицы**

$$\hat{A} = \left\{ a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{\bar{x}=0} \right\}$$

удовлетворяют условию $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$, то тривиальное решение системы (25.1) асимптотически устойчиво. Если хотя бы одно λ_k имеет $\mathrm{Re}\,\lambda_k > 0$, то решение неустойчиво.

Доказательство теоремы основано на представлении разложения правой части системы в виде:

$$\bar{f}(\bar{x}) = \hat{A}\bar{x} + \bar{R},\ \hat{A} = \left\{ a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{\bar{x}=0} \right\} \qquad (25.4)$$

где $\bar{R}$ - остаточный член, равный

$$\bar{R} = \left\{ R_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} \Big|_{x=\bar{x}^{\xi}} x_j x_k \right\}, \qquad (25.5)$$

$\bar{x}^{\xi}$ - некоторая средняя точка интервала разложения $\bar{f}(\bar{x})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Исследуем, как влияет на устойчивость нелинейная поправка $\bar{R}(\bar{x})$.

Для этого рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = A\overline{x} + \overline{R}(\overline{x}), \quad t > 0, \\ \overline{x}(t=0) = \overline{x}_0. \end{cases} \tag{25.6}$$

Пусть $\hat{Z}(t,\tau) = \hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(\tau)$ -импульсная функция для системы

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \hat{A}\overline{x}.$$

Тогда из (22.10) получим

$$\overline{x}(t) = \hat{Z}(t,0)\overline{x}_0 + \int_0^t \hat{Z}(t,\tau)\overline{R}(\overline{x}(\tau))d\tau \tag{25.7}$$

Используя лемму 24.1, где дана оценка $\hat{Z}(t,\tau)$,и, учитывая, что $\left\|\overline{R}\right\| \le C\left\|\overline{x}\right\|^2$, получим

$$\left\|\overline{x}\right\| \le Ce^{-\alpha t}\left\|x_0\right\| + C\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\left\|x\right\|^2 d\tau, \tag{25.8}$$

где $\alpha = -(p+\gamma)$; $p = \max_k \operatorname{Re}\lambda_k < 0, \gamma$ - любое положительное число, $p+\gamma < 0$.

Чтобы из (25.8) получить оценку для $\left\|\overline{x}\right\|$ при $t \to \infty$, рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = -\alpha\, z + cz^2, \quad t > 0 \\ z(0) = z_0 > c\left\|x_0\right\|, \quad c > 0 \end{cases} \tag{25.9}$$

Сведем задачу (25.9) к интегральному уравнению, считая $f = cz^2$,

$$z(t) = z_0 e^{-\alpha t} + c\int_0^t e^{-\alpha (t-\tau)} z^2(\tau) d\tau . \quad (25.10)$$

Сравнивая (25.8) и (25.10), получаем, что при $z_0 > C\|\bar{x}_0\|, C > 0$ выполняется неравенство

$$z(t) > \|\bar{x}\| \text{ при любом } t \geq 0. \quad (25.11)$$

Проведем доказательство оценки (25.11). Так как $z(t)$ и $\|\bar{x}(t)\|$ непрерывны, а при $t = 0$ выполняется условие $z(0) > c\|\bar{x}_0\| \geq \|\bar{x}(t=0)\|$,

следовательно,

$z(t) > \|\bar{x}(t)\|$ на некотором интервале $t \in [0, t_1)$, Тогда проведем сравнение $z(t_1)$ и $|\bar{x}(t_1)|$:

$$z(t_1) = z_0 e^{-\alpha\, t_1} + C\int_0^{t_1} e^{-\alpha\, (t_1-\tau)} z^2(\tau) d\tau >$$

$$> C\|x_0\| e^{-\alpha\, t_1} + C\int_0^{t_1} e^{-\alpha\, (t_1-\tau)} \|\bar{x}(\tau)\| d\tau = \|\bar{x}(t_1)\|,$$

Следовательно, $z(t_1) > \|\bar{x}(t_1)\|$. Таким образом, получили, что $z(t) > \|\bar{x}(t)\|$ при любом $t \in [0, \infty)$.

Задача (25.9) для $z(t)$ имеет аналитическое решение

$$z(t) = \frac{\alpha\, z_0}{Cz_0 + (\alpha - Cz_0)e^{\alpha\, t}} \; . \quad (25.12)$$

Согласно (25.12), при $a > 0$ и $z_0 < \frac{\alpha}{c}$ имеем $z(t) > 0$ при $t \in [0, \infty)$ и $z(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Следовательно, и $\|\overline{x}(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$, т.к. $\|\overline{x}(t)\| < z(t)$.

Таким образом, мы доказали асимптотическую устойчивость автономной системы, если $p = \max_k \operatorname{Re} \lambda_k < 0$.

При исследовании на устойчивость автономной системы дифференциальных уравнений (25.1) мы считали, что имеется единственная точка покоя. Однако, уравнение

$$\overline{f}(\overline{x}) = 0 \tag{25.13}$$

в общем случае может иметь несколько корней $\overline{x}^i$, $i \in [1, n]$, где $f(\overline{x}^i) = 0$. Тогда можно получить точку покоя для задачи

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}(t)}{dt} = \overline{f}(\overline{x}), \ t \in [0, \infty) \\ \overline{x}(0) = \overline{x}^i, \quad \overline{f}(\overline{x}^i) = 0. \end{cases} \tag{25.14}$$

Сделав замену искомой функции $\overline{y}(t) = \overline{x}(t) - \overline{x}^i$, получаем задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{y}(t)}{dt} = \overline{F}(\overline{y}(t)); \ \overline{f}(\overline{y}(t) + \overline{x}^i); \ \overline{F}(0) = 0, \\ \overline{y}(0) = 0 \end{cases}$$

с точкой покоя $\overline{y} = 0$. Знание точек покоя $\overline{x}^i$, $i \in [1, n]$ качественно описывает систему уравнений (25.14). Исследуем поведение решения в окрестности точки покоя, определим качественную картину поведения траектории в окрестности точки покоя. Исследование для наглядности проведем в двумерном случае $\bar{x} = x_1(t), x_2(t)$ для системы с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \hat{A}\bar{x};\ \hat{A} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix} \qquad (25.15)$$

Предположим, что в системе (25.15) $\lambda = 0$ не является корнем характеристического уравнения , и корни различны: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. В этом случае общее решение (25.15) имеет вид:

$$\bar{x} = C_1\bar{\alpha}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + C_2\bar{\alpha}^{(2)}e^{\lambda_2 t}\ , \qquad (25.16)$$

где $\bar{\alpha}^{(1)}, \bar{\alpha}^{(2)}$- собственные вектора матрицы $\hat{A}$, соответственно для λ_1 и λ_2.

Дифференциальное уравнение для фазовой траектории имеет вид

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{21}x_1 + a_{22}x_2} \qquad (25.17)$$

Из (25.16) следует

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = x_1' = C_1\lambda_1\alpha_1^{(1)}e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2\alpha_1^{(2)}e^{\lambda_2 t}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = x_2' = C_1\lambda_1\alpha_2^{(1)}e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2\alpha_2^{(2)}e^{\lambda_2 t}$$

Подставив полученные выражения в (25.17) получим уравнение для фазовой траектории

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2'(t)}{x_1'(t)} = \frac{C_1\lambda_1\alpha_2^{(1)}e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2\alpha_2^{(2)}e^{\lambda_2 t}}{C_1\lambda_1\alpha_1^{(1)}e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2\alpha_1^{(2)}e^{\lambda_2 t}} \qquad (25.18)$$

Рассмотрим поведение фазовых траекторий в окрестности точки покоя для разных соотношений между λ_1 и λ_2.

1. **Действительные λ одного знака**.

1а. $Im\lambda_1 = Im\lambda_2 = 0, \quad 0 > \lambda_1 > \lambda_2$ (отрицательные характеристические числа). Точка покоя, согласно теореме 25.1, асимптотически устойчива.

Если $C_1 \neq 0$, то при $t \to \infty$ имеем $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{\alpha_2^{(1)}}{\alpha_1^{(1)}} = \beta_1$, следовательно, при $t \to \infty$ фазовая траектория стремится к асимптотической прямой $x_2 = \beta_1 x_1$ (проходит через точку покоя).

Если $C_1 = 0$, то имеем $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{\alpha_2^{(2)}}{\alpha_1^{(2)}} = \beta_2$ (прямая $x_2 = \beta_2 x_1$). Эти прямые называются ***сепаратрисами.***

Таким образом, при любых начальных данных фазовая траектория стремится к прямой $x_2 = \beta_2 x_1$ и при $t \to \infty$ имеем $\overline{x} \to 0$ (решение стремится к точке покоя).

Только при специальном выборе начальных данных $x_2^0 = \beta_1 x_1^0$, когда начальная точка находится на прямой $x_2 = \beta_2 x_1$, движение траектории к нулю идет по прямой $x_2 = \beta_2 x_1$.

Схематично фазовые траектории в этом случае представлены на рис.25.1. Такая точка покоя называется ***устойчивым узлом.***

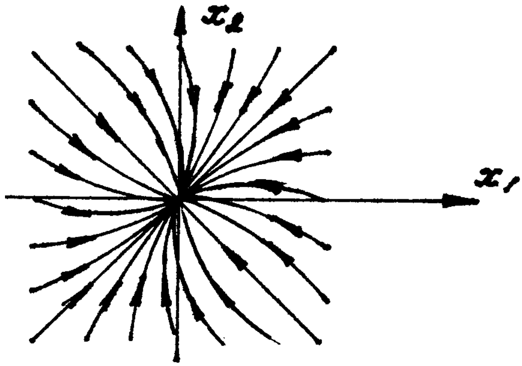

Рис.25.1
Поведение траекторий в окрестности устойчивого узла.

1б. Рассмотрим случай положительных действительных корней характеристического уравнения ($Im\lambda_1 = Im\lambda_2 = 0,\ \ \lambda_2 > \lambda_1 > 0$). Сепаратрисы в этом случае получаются те же, и мы имеем неустойчивый узел. Картина траекторий в окрестности точки покоя $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$ аналогична рис.25.1, только стрелки идут от начала координат (решение неустойчиво). Заметим, что при $t \to \infty$, если точка покоя единственна, все траектории стремятся к сепаратрисе $x_2 = \beta_2\ x_1$.

2. Действительные характеристические числа разного знака.

Пусть $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0\ \ (Im\lambda_1 = 0,\ \ \mathrm{I}m\lambda_2 = 0)$.

Точка покоя, согласно теореме 25.1, неустойчива.

Если $C_1 \neq 0$, то при $t \to \infty$ имеем $\dfrac{dx_2}{dx_1} \to \beta_1 = \dfrac{\alpha_2^{(2)}}{\alpha_1^{(2)}}$, причем $|x_1| \to \infty$ и $|x_2| \to \infty$, т.е. точка траектории при $t \to \infty$ стремится в бесконечность, асимптотически приближаясь к прямой $x_2 = \beta_1 x_1$. Эта прямая называется ***сепаратрисой***. Особый случай, когда $C_1 = 0$. Тогда имеем сепаратрису $x_2 = \beta_2 x_1$. Если начальная точка траектории находится на этой сепаратрисе, то решение стремится к точке покоя. Однако это не означает устойчивости решения, т.к., согласно определению устойчивости по Ляпунову, стремление решения к нулю дает асимптотическую устойчивость, если это происходит при любых начальных данных, удовлетворяющих условию $\|\overline{x}_0\| < \delta_0$.

Таким образом, траектории вначале стремятся к сходящейся сепаратрисе $x_2 = \beta_2 x_1$, а затем отклоняются и уходят в бесконечность, асимптотически приближаясь к расходящейся сепаратрисе $x_2 = \beta_1 x_1$. Точка покоя, отвечающая случаю действительных характеристических числа разного знака, называется ***седлом.*** *Седло – неустойчивая точка покоя.*

Схематично траектории в случае «седла» приведены на рис 25.2

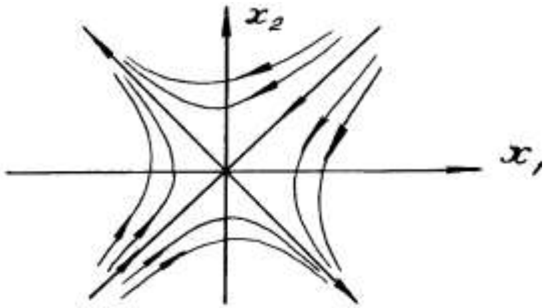

Рис 25.2
Поведение траекторий в окрестности седла.

3. Случай комплексных характеристических чисел.

Пусть имеем комплексное характеристическое число $\lambda_1 = p + iq$. Тогда должно быть второе комплексно сопряженное число $\lambda_2 = p - iq$. В этом случае решения имеют вид:

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{pt}(\alpha \cos qt + \beta \sin qt) \\ x_2(t) = e^{pt}(\gamma \cos qt + \delta \sin qt) \end{cases} \qquad (25.19)$$

Из линейной независимости решений следует

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma = D \neq 0 \qquad (25.20)$$

Из системы (25.19) находим

$$
\begin{aligned}
e^{pt}\sin qt &= -\frac{\gamma}{D}x_1(t)+\frac{\alpha}{D}x_2(t),\\
e^{pt}\cos qt &= \frac{\delta}{D}x_1(t)-\frac{\beta}{D}x_2(t)
\end{aligned}
\qquad (25.21)
$$

Используя тождество $\sin^2 qt+\cos^2 qt=1$, получим

$$
\left(\frac{\gamma}{D}x_1-\frac{\alpha}{D}x_2\right)^2+\left(\frac{\delta}{D}x_1(t)-\frac{\beta}{D}x_2(t)\right)=e^{2pt} \qquad (25.22)
$$

3а. При $p=0$(характеристические числа чисто мнимые) формула (25.22) дает нам уравнение эллипса. Точка покоя устойчива, но не асимптотически. Это точка называется ***центром.*** Схематично это показано на рис 25.3.

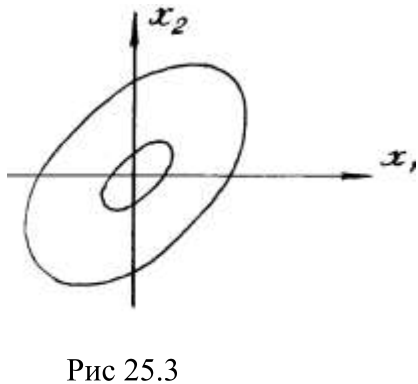

Рис 25.3

Поведение траекторий в окрестности точки центр

3б**.** При $p \neq 0$ уравнение (25.22) дает нам уравнение эллиптической спирали. При $p < 0$ имеем асимптотическую устойчивость (спираль с уменьшающимся радиусом стремящимся к нулю). При $p > 0$ решение неустойчиво (имеем раскручивающуюся спираль с радиусом стремящимся к ∞).

Схематично траектории показаны на рис 25.4.Точка покоя в этом случае называется ***фокус.***

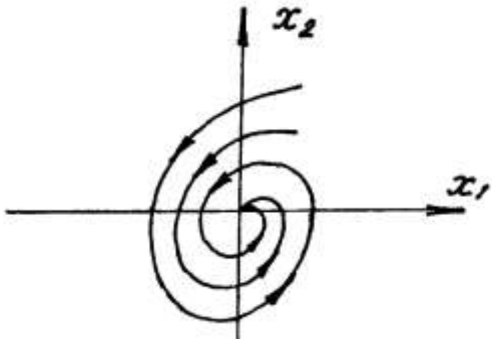

Рис 25.4
Поведение траекторий в окрестности точки фокус (показан случай $p < 0$).

§26. Исследование устойчивости решения методом функций Ляпунова.

Ранее был рассмотрен метод изучения устойчивости решения автономной системы. Однако этот метод далеко не всегда дает ответ на поставленный вопрос. Во-первых, система может не быть автономной, а во-вторых, автономная система может иметь сильную нелинейность,например,

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 x_2^4, \ t \in [0,\infty), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1^4 x_2, \ x_1(0) = 0, \ x_2(0) = 0. \end{cases} \tag{26.1}$$

Решение системы (26.1) не может быть исследовано на устойчивость по первому приближению. А.М.Ляпуновым был предложен более общий метод исследования устойчивости, в котором для заданной системы дифференциальных уравнений находится положительно определенная функция $V(\overline{x})$, называемая ***функцией Ляпунова,*** и по ее свойствам делается вывод об устойчивости решения системы.

Определение 26.1. Функция $V(\overline{x})$называется ***положительно определенной*** в Ω, если $V(\overline{x}) \geq 0$ при $\overline{x} \in \Omega$, причем $V(\overline{x}) = 0$ только при $\overline{x} = 0$.

Заметим, что если $V(\overline{x})$ положительно определена и непрерывна в Ω, то $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0$ такое, что при $\overline{x} \in \Omega$ и $\|\overline{x}\| > \delta$ имеем $V(\overline{x}) > \varepsilon$, а если для некоторых $\overline{x} \in \Omega$ выполняется условие $V(\overline{x}) \geq \varepsilon > 0$, то $\exists \delta > 0$ такое, что $\|\overline{x}\| \geq \delta$.

Т е о р е м а **26.1 (об устойчивости решения). Пусть в области Ω существует непрерывная вместе со своими первыми частными производными положительно определенная функция $V(\overline{x})$ такая, что функция**

$$W(\overline{x},t) = (gradV(\overline{x}) \bullet \overline{f}(\overline{x},t)) \tag{26.2}$$

удовлетворяет неравенству

$$W(\overline{x},t) \leq 0 \text{ для } t > 0,\ \overline{x} \in \Omega\ . \tag{26.3}$$

Тогда решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = \overline{f}(\overline{x},t),\ t > 0, \\ \overline{x}(0) = 0,\ \overline{f}(\overline{x} = 0,t) = 0 \end{cases} \tag{26.4}$$

устойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Нам необходимо доказать, что для $\forall \varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из условия $\|\overline{x}(t=0)\| \leq \delta$ следует $\|\overline{x}(t)\| \leq \varepsilon$. Заметим, что для $\forall \varepsilon_1 > 0$ найдется такое δ, что из условия $\|\overline{x}(t=0)\| \leq \delta$ следует $V(\overline{x}(t=0)) \leq \varepsilon_1$, т.к. $V(\overline{x})$- положительно определенная непрерывная функция в окрестности Ω.

Из определения (26.2) следует

$$W(\overline{x},t)=(gradV(\overline{x}),\overline{f}(\overline{x},t))=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(\overline{x})}{\partial x_i}\bullet f_i(\overline{x},t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(\overline{x})}{\partial x_1}\bullet\frac{dx_i}{dt}=\frac{dV}{dt}. \qquad (26.5)$$

Тогда при $t\in[0,t_1]$

$$V(\overline{x}(t))=V(\overline{x}(t=0))+t_1\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=t'},\ t'\in[0,t_1] \qquad (26.6)$$

Т.к. $0<V(\overline{x}(t=0))\le\varepsilon_1$, а $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=t'}\le 0$ по условию (26.3), то из равенства (26.6) следует

$$V(\overline{x}(t))\le\varepsilon_1 \qquad (26.7)$$

Из (26.7) и свойств положительно определенной функции следует, что $\left\|\overline{x}(t)\right\|\le\varepsilon$,
что и требовалось доказать.

Для примера рассмотрим применение метода к исследованию системы (26.1). Возьмем функцию Ляпунова в виде $V(\overline{x})\le x_1^4+x_2^4$. Это положительно определенная функция. Тогда

$$W(\overline{x},t)=\frac{\partial V(\overline{x})}{\partial x_1}(-x_1x_2^4)+\frac{\partial V(\overline{x})}{\partial x_1}(x_1^4x_2)=$$

$$=-4x_1^4x_2^4+4x_1^4x_2^4=0.$$

Согласно теореме 26.1, решение системы 26.1 устойчиво.

Т е о р е м а **26.2 (об асимптотической устойчивости). Если в теореме 26.1 вместо условия (26.3) потребовать**

$$W(\overline{x},t) \le -W^0(\overline{x},t) \qquad (26.8)$$

где $W^0(\overline{x},t)$ **положительно определена в** Ω**, то решение системы (26.4) будет асимптотически устойчиво.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

По теореме 26.1 решение системы устойчиво. Необходимо доказать, что $\lim\limits_{t\to\infty}\overline{x}(t)=0$.

Т.к.по условию (26.8)

$$\frac{dV}{dt} = W(\overline{x},t) \le -W^0(\overline{x},t) < 0\text{, если } \overline{x}=0,$$

то $V(\overline{x})$ убывает в Ω при $\overline{x}\to 0$ и, следовательно, имеет место предел

$$\lim_{t\to\infty} V(\overline{x}(t)) = 0.$$

Из свойств положительно определенной функции $V(\overline{x})$ получаем

$$\lim_{t\to\infty}\overline{x}(t)=0,$$

что и требовалось доказать.

Пример. Исследуем на устойчивость тривиальное решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1^3 - x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2^3. \end{cases}$$

Возьмем функцию Ляпунова в виде $V(\overline{x}) = x_1^2 + x_2^2$, которая удовлетворяет условиям теоремы. Теперь вычислим

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} = 2x_1(-x_1^3 - x_2) + 2x_2(x_1 - x_2^3) =$$

$$= -2(x_1^4 + x_2^4) \le -W^0(\overline{x}).$$

$W^0 = x_1^4 + x_2^4$ - положительно определенная функция. Следовательно, согласно теореме 26.2, решение системы асимптотически устойчиво.

Ясно, что аналогичный подход можно использовать и для доказательства неустойчивости решения. В этом случае также находится функция Ляпунова

$$V(\overline{x}) \ge \alpha > 0 \qquad (26.9)$$

такая, что

$$W(\overline{x},t) = (gradV(\overline{x}) \bullet \overline{f}(\overline{x},t)) \ge \beta > 0, \ \forall t > 0.$$

Отличие теорем об устойчивости заключается в том, что достаточно, чтобы условие (26.9) выполнялось не во всей области Ω, а только в подобласти $\omega_\delta^+ \in \omega_\delta \in \Omega$, где ω_δ - окрестность точки покоя $\overline{x} = 0$.

***Т е о р е м а* 26.3. Пусть в Ω существует непрерывная с частными производными первого порядка функция Ляпунова $V(\overline{x})$ такая, что выполняются условия:**

а) для любого $\delta > 0$ существует $\alpha > 0$ и существует подобласть $\omega_\delta^+ \in \omega_\delta \in \Omega$ (ω_δ -окрестность точки $\overline{x} = 0$), в которой выполняется неравенство (26.9)

$$V(\overline{x}) \geq \alpha > 0;$$

б) для $\alpha > 0$ существует $\beta > 0$ такое, что из неравенства (26.9) следует неравенство (26.10) справедливое для всех $t > 0$:

$$W(\overline{x},t) = (gradV(\overline{x}), \overline{f}(\overline{x},t)) \geq \beta > 0 \qquad \textbf{(26.10)}$$

Тогда решение системы (26.4) неустойчиво.

Доказательство.

Доказательство проводим от противного. Пусть $\overline{x} = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из условия $\left\|\overline{x}(0)\right\| < \delta$ следует $\left\|\overline{x}(t)\right\| < \varepsilon$ для любого $t \geq 0$. С другой стороны, для данного δ существуют $\alpha > 0$ и подобласть ω_δ^+ такая, что

$$V(\overline{x}) \geq \alpha > 0.$$

Пусть $\overline{x}(t=0) = \overline{x}^0 \in \omega_\delta^+$ и $V(\overline{x}^0) = \alpha$. Тогда, в соответствии с условием (26.10),

$$V(\overline{x}(t_1)) = V(\overline{x}_0) + t_1 \left.\frac{dV}{dt}\right|_{t'} =$$

$$= \alpha + t_1 W(\overline{x},t') \geq \alpha + \beta t_1,\ 0 \leq t' \leq t_1,$$

т.е. $V(\overline{x}(t_1))$ возрастает. Это невозможно, т.к. из условия устойчивости $\left\|\overline{x}(t)\right\| < \varepsilon$, и следовательно, $V(\overline{x})$ ограничено. Пришли к противоречию. Следовательно, решение неустойчиво.
Теорема доказана.

Рассмотрим исследование на устойчивость решения системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1^5 + x_2^3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1^3 - x_2^5. \end{cases}$$

Функция $V(\bar{x}) = x_1^4 - x_2^4 > 0$ при $|x_1| > |x_2|$.

Условие $|x_1| > |x_2|$ определяет подобласть ω_δ^+:

$$\frac{dV}{dt} = 4x_1^3(x_1^5 + x_2^3) - 4x_2^3(x_1^3 + x_2^5) =$$

$$= 4(x_1^8 - x_2^8) > 0, \qquad \bar{x} \in \omega_\delta^+.$$

Следовательно, решение неустойчиво.

Задачи к IV главе.

1. Исследовать на устойчивость точку покоя $x(0) = 0,\ y(0) = 0$ и определить ее тип для линейной системы дифференциальных уравнений:

1.1 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

1.2 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y \end{cases}$

1.3 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - 3z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - 5y - 3z \end{cases}$

2. При каких действительных значениях α точка покоя $x(0) = 0,\ y(0) = 0, z(0) = 0$ системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = \alpha y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = \alpha z - x \end{cases}$$

устойчива?

3. При каких значениях параметров α, β решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + \alpha y \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta x - 3y \end{cases}$$

асимптотически устойчиво?

4. Исследовать на устойчивость решения автономных систем дифференциальных уравнений:

4.1 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + e^y - \cos y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - y - \sin y \end{cases}$$

4.2 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2y - x^5 \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y^5 \end{cases}$$

4.3 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x - x^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - x^2 - y \end{cases}$$

4.4 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = \sin(x + y) \end{cases}$$

5. Исследовать на устойчивость решение
$x = \cos t;\ y = 2\sin t$ системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \ln(x + 2\sin^2 \dfrac{t}{2}) - \dfrac{y}{2} \\ \dfrac{dy}{dt} = (4 - x^2)\cos t - 2x\sin^2 t - \cos^3 t \end{cases}$$

6. Исследовать устойчивость точки покоя методом функции Ляпунова для системы дифференциальных уравнений:

6.1 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x + xy \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y - x^2 - y^2 \end{cases}$$

6.2 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y^3 - x^5 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - y^3 + y^5 \end{cases}$$

6.3 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - x - y^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases}$$

6.4 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x - xy \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y - y^2 \end{cases}$$

ГЛАВА V

Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка.

§27.Линейные уравнения в частных производных первого порядка.

Уравнения в частных производных первого порядка рассматриваются вместе с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений, т.к. построение общего решения этих уравнений базируется на задаче Коши для обыкновенных уравнений. Уравнения в частных производных возникают при изучении функции многих переменных.

Пусть нам дана функция многих переменных $U(\overline{x}) = U(x_1, x_2, ..., x_n)$ и ее непрерывные частные производные $\dfrac{\partial U}{\partial x_i}$; $i \in \overline{1, n}$.

Определение 27.1 Выражение вида $F(x_1, \ldots, x_n, U, \dfrac{\partial U}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial U}{\partial x_n}) = 0$ называется ***уравнением в частных производных первого порядка.***

Определение 27.2 ***Линейным уравнением в частных производных*** называется уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\overline{x}) \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0, \quad \overline{x} \in R_n, \tag{27.1}$$

коэффициенты которого $a_i(\overline{x})$ при $\overline{x} \in G \in R_n$ - непрерывные функции, имеющие непрерывные частные производные.

Определение 27.3 ***Неоднородным линейным уравнением в частных производных первого порядка*** называется уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\overline{x})\frac{\partial U}{\partial x_i} = a_{n+1}(\overline{x}). \qquad (27.2)$$

Определение 27.4 ***Квазилинейным уравнением в частных производных первого порядка*** называется уравнение (27.2) , коэффициенты и правая часть которого зависят от искомой функции $U(\overline{x})$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\overline{x},U)\frac{\partial U(\overline{x})}{\partial x_i} = a_{n+1}(\overline{x},U). \qquad (27.3)$$

Отметим, что неоднородное линейное уравнений (27.2)является частным случаем квазилинейного уравнения (27.3). Поэтому мы исследуем линейное и квазилинейное уравнения в частных производных первого порядка. Рассмотрим вначале линейное уравнение (27.1).

Заметим, что, введя векторы

$$\overline{a}(\overline{x}) = (a_1(\overline{x}),...,a_n(\overline{x})) \text{ и } gradU = (\frac{\partial U}{\partial x_1},...,\frac{\partial U}{\partial x_n}),$$

мы можем записать уравнение (27.1) в виде скалярного произведения

$$\overline{a}(\overline{x})\bullet gradU = 0. \qquad (27.4)$$

Это означает, что направление вектора $\overline{a}(\overline{x})$ ортогонально к $gradU$. Так как $gradU$ направлен в сторону максимального изменения функции *U(x)* , то вектор $\overline{a}(\overline{x})$ имеет направление сохранения значения функции *U(x).*

Определение 27.5. ***Характеристиками уравнения*** (27.1) называются интегральные кривые системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{a_1(\overline{x})} = \frac{dx_2}{a_2(\overline{x})} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n(\overline{x})}. \qquad (27.5)$$

Отметим, что система (27.5) означает, что вектора $d\overline{x}$ и $\overline{a}(\overline{x})$ коллинеарны. Это говорит о том, что $d\overline{x}$ имеет направление в сторону сохранения значения *U(x)*. Пусть характеристики заданы параметрически

$$x_i = x_i(t), \;\; i \in [1, n].$$

Тогда из (27.5) имеем задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = a_i(\overline{x}), \;\; t \in [t_0, t_0 + T], \\ x_i(t = t_0) = x_i^0, \;\; i \in [1, n-1]. \end{cases} \qquad (27.6)$$

Т.к. $\overline{a}_i(x)$ имеет непрерывные частные производные, то выполняются условия существования и единственности задачи Коши. Это означает, что через любую точку $\overline{x}^0$ проходит характеристика, и притом единственная.

Т е о р е м а **27.1. Вдоль характеристики решение $U(\overline{x})$ сохраняет постоянное значение.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Если $x_i(t) = x_i$ параметрическое задание характеристики, то

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} a_i = 0$$

(согласно уравнению (27.1)).

Следовательно, $\dfrac{dU}{dt}=0$ вдоль характеристики, откуда следует, что $U=const$ вдоль характеристики.
Теорема доказана.
Определение 27.6 Первым интегралом уравнения (27.1) называется функция $\varphi\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, обращающаяся тождественно в постоянную, когда $M(x_1,\ldots,x_n)$ движется вдоль характеристики.

Возникает вопрос, как определить первые интегралы. Для этого исключим из системы уравнений (27.6) переменную *t*, т.е. перейдем в фазовое пространство. Пусть $a_n(\overline{x})\neq 0.$ Тогда получим систему, в которой x_n является независимой переменной:

$$\frac{dx_i}{dx_n}=\frac{a_i(\overline{x})}{a_n(\overline{x})}\quad,\ i\in\left[1,n-1\right], \tag{27.7}$$

начальные данные $x_i\Big|_{x_n=x_n^0}=x_i^0,\ \ i\in\ 1,n-1\ .$

Решение системы (27.7) можно записать в виде

$$x_i=X_i(x_n,x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0),\ \ i\in\left[1,n-1\right]\ . \tag{27.8}$$

Функции X_i сопоставляют точки x_i и x_i^0 Эти точки можно поменять местами, т.е.записать

$$x_i^0=X_i(x_n^0,x_1,x_2,\ldots,x_n),\ \ i\in\left[1,n-1\right], \tag{27.9}$$

Функции $X_i(x_n^0,\overline{x}),i\in\ 1,n-1$ представляют собой *(n-1)* первые интегралы уравнений (27.1). Это легко доказать, т.к. если точка с координатами $\overline{x}$ принадлежит некоторой характеристике, то, согласно (27.9)

$$X_i(x_n^0,\overline{x})\Big|_{харак.}=x_i^0=\text{const},\ \ i\in\ 1,n-1$$

Взаимная обратимость функций, согласно (27.8) и (27.9) означает неравенство нулю якобиана:

$$\frac{D(X_1,\ldots,X_{n-1})}{D(x_1,\ldots x_{n-1})}\neq 0 \quad \text{при } M\in G.$$

Это означает, что $X_1,\ldots,X_{n-1}$ являются функционально независимыми первыми интегралами. С другой стороны, $\varphi_i(\overline{x}) = X_i(x_n^0,\overline{x})$ являются линейно независимыми решениями уравнения (27.7), записанными в неявном виде:

$$\varphi_i(\overline{x}) = X_i(\overline{x}) = C_i = const,\ i\in[1,n]. \quad (27.10)$$

Рассмотрим в качестве примера определение характеристик и первого интеграла для линейного уравнения

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (27.11)$$

Уравнение для характеристик имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

которое имеет решение $x^2+y^2=R^2$. Это уравнение характеристик, представляющих собой окружность с центром в начале координат. Первым интегралом является функция $\varphi(x,y)=x^2+y^2$, которая обращается в константу на характеристиках.

Для определения общего решения уравнения (27.1) докажем следующее утверждение.

***Т е о р е м а* 27.2. Всякое решение $\Psi(\bar{x})$ уравнения (27.1) является первым интегралом системы (27.7) и, обратно, всякий первый интеграл системы (27.7) $\varphi(\bar{x})$ является решением уравнения (27.1).**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Пусть $\Psi(\bar{x}) = U(\bar{x})$ - решение уравнения (27.1). Тогда, согласно теореме 27.1, $U(\bar{x}) = const$ на характеристике. Следовательно, $\Psi(\bar{x}) = U(\bar{x}) = const$ на характеристике, т.е. $\Psi(\bar{x})$ - первый интеграл.

2. Пусть $\varphi(\bar{x})$ - первый интеграл. Это означает, что $\varphi = const$ на характеристике. Если $x_i = x_i(t),\ i \in [1, n]$ уравнение характеристике в параметрическом виде, то для любого $\varphi(\bar{x}(t))$ имеем $\dfrac{d\varphi}{dt} = 0$ на характеристике. Тогда имеем уравнение

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx_i}{dt} \bullet \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0.$$

Таким образом, $\varphi(\bar{x})$ удовлетворяет уравнению (27.1) на характеристике. Однако, характеристика проходит через любую точку области *G*, следовательно, $\varphi(\bar{x})$ удовлетворяет уравнению (27.1) во всей области *G*. Это означает, что $\varphi(\bar{x})$ - решение уравнения (27.1).

Следствие. Произвольная функция от первых интегралов
$F(\varphi_1(\bar{x}), ..., \varphi_{n-1}(\bar{x}))$, имеющая непрерывные частные производные $\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_i},\ i \in [1, n-1]$, является решением уравнения (27.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из того, что функция от первых интегралов есть первый интеграл, а, следовательно, согласно теореме 27.2, является решением линейного уравнения в частных производных первого порядка (27.1). Таким образом, общее решение (27.1) определяется с точностью до произвольной функции от первых интегралов.

Задачей Коши для линейного уравнения в частных производных первого порядка называется задача, в которой имеется дополнительное условие, позволяющее однозначно определить решение. Для наглядности рассмотрим вначале постановку задачи Коши и метод ее решения для двумерного случая. Задача Коши в этом случае ставится следующим образом:
Найти непрерывную функцию $U(x,y)$, имеющую непрерывные частные производные, удовлетворяющую уравнению

$$a_1(x,y)\frac{\partial U}{\partial x}+a_2(x,y)\frac{\partial U}{\partial y}=0 \qquad (27.12)$$

и начальному условию

$$U(x,y)\big|_{\gamma}=\omega(s), \qquad (27.13)$$

где

$$\gamma=\begin{cases} x=x(s) \\ y=y(s) \end{cases}$$ - кривая, не совпадающая с характеристикой ни на одном интервале положительной длины, а $\omega(s)$ - заданная функция.

Рассмотрим метод решения поставленной задачи. Пусть нам известен $\varphi(x,y)$ - первый интеграл уравнения (27.12).

Рассмотрим зависимость от s первого интеграла на кривой γ:

$$\varphi(x,y)\big|_{\gamma} = \varphi(x(s), y(s)) = \xi(s).$$

Обратим функцию $\xi(s) = \xi$ и получим $s = \Omega(\xi)$. Тогда имеем

$$\Omega(\varphi(x,y))\big|_{\gamma} = \Omega(\xi(s)) = s.$$

Следовательно, решение $U(x,y)$ представимо в виде

$$U(x,y) = \omega(\Omega(\varphi(x,y))). \qquad (27.14)$$

Оно удовлетворяет уравнению (27.12), т.к. является функцией от $\varphi(x,y)$ - первого интеграла. Выражение (27.14) удовлетворяет начальному условию (27.13), т.к.

$$U(x,y)\big|_{\gamma} = \omega(\Omega(\varphi(x,y)))\big|_{\gamma} = \omega(\Omega(\varphi(x,y)\big|_{\gamma})) = \omega(s).$$

Для примера рассмотрим решение задачи Коши для уравнения

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

При начальном условии $u(x,y) = x^4$ на прямой $y = 0$. Мы нашли ранее первый интеграл для этого уравнения

$$\varphi(x,y) = x^2 + y^2.$$

Следовательно, общее решение представимо в виде $u(x,y) = F(x^2 + y^2)$. Подставим это решение в начальное условие

$$F(x^2 + y^2)\big|_{y=0} = F(x^2) = x^4.$$

Следовательно, $F(t) = t^2$, и решение имеет вид

$$u(x,y) = (x^2 + y^2)^2.$$

Рассмотрим теперь решение задачи Коши для линейного уравнения в частных производных первого порядка в многомерном случае, когда решение $U(\overline{x})$ зависит от *n* переменных $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. В этом случае решение уравнения (27.1) должно удовлетворять условию Коши

$$U\Big|_{\gamma_{n-1}} = \omega(\overline{s}),\ \overline{s} = (s_1, s_2, ..., s_{n-1}), \qquad (27.15)$$

где γ_{n-1} - многообразие (*n*-1)-го измерений, заданное параметрически в виде:

$$x_i = x_i(\overline{s}),\ \ i \in [1, n]. \qquad (27.16)$$

Согласно следствию теоремы 27.2, решение уравнения (27.1) равно произвольной функции от (*n*-1)-го первых интегралов

$$U(\overline{x}) = F(\varphi_1(\overline{x}), ..., \varphi_{n-1}(\overline{x})), \qquad (27.17)$$

где $\varphi_i(\overline{x}),\ i \in [1, n-1]$ - функционально независимые первые интегралы уравнения (27.1). Введем обозначения

$$\varphi_i(x_1 = x_1(\overline{s}), ..., x_n(\overline{s})) = \xi_i,\ \ i \in [1, n-1]. \qquad (27.18)$$

Разрешив систему (27.18) относительно $\overline{s}$, получим:

$$s_i = \Omega_i(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n-1}),\ i \in [1, n-1] \qquad (27.19)$$

Тогда решение задачи Коши будет равно:

$$\begin{aligned} U(\overline{x}) = \omega(&\Omega_1(\varphi_1(\overline{x}), ..., \varphi_{n-1}(\overline{x})), \\ &..., \Omega_{n-1}(\varphi_1(\overline{x}), ..., \varphi_{n-1}(\overline{x})). \end{aligned} \qquad (27.20)$$

Действительно $U(\bar{x})$ в (27.20) является функцией от первых интегралов и, согласно теореме 27.2, есть решение уравнения (27.1). Одновременно выражение (27.20) удовлетворяет условию Коши (27.15), т.к.

$$U\Big|_{\gamma_{n-1}} = \omega(\Omega_1(\bar{\xi}),\ldots,\Omega_{n-1}(\bar{\xi})) = \omega(\bar{s}).$$

§28. Квазилинейные уравнения для частных производных первого порядка.

В предыдущем параграфе мы рассмотрели решение линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка.(27.1).
Рассмотрим теперь более общий вид уравнения (27.3). Решение квазилинейного уравнения (27.3) сводится к решению линейного уравнения для функции $V(x,U)$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\bar{x},U)\frac{\partial V}{\partial x_i} + a_{n+1}(\bar{x},U)\frac{\partial V}{\partial U} = 0. \qquad (28.1)$$

Решение уравнения вида (28.1) было рассмотрено в предыдущем §27. Если мы нашли решение уравнения (28.1) $V = V(\bar{x},U),$ то из условия $V(\bar{x},U) = 0$ можно определить $U=\varphi(\overline{x})$, если $\left.\frac{\partial V}{\partial U}\right|_{U=\varphi(x)} \neq 0.$Полученное

$U=\varphi(\overline{x})$ является решением квазилинейного

уравнения(27.3). Докажем это.

Т е о р е м а **28.1 Если** $V=V(\overline{x},U)$ **- решение уравнения (28.1), то выражение**$V(\overline{x},U)=0$ **определяет функцию** $U=\varphi(\overline{x})$**, которая при выполнении условия** $\left.\frac{\partial V}{\partial U}\right|_{U=\varphi(x)} \neq 0$ **является решением уравнения (27.3).**

Д о к а з а т е л ь с т в о.
Согласно теореме о дифференцировании неявной функции, имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}=\frac{\partial U}{\partial x_i}=-\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial V}{\partial U}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\overline{x},U)\frac{\partial U(\overline{x})}{\partial x_i}=-\frac{1}{\dfrac{\partial V}{\partial U}}\sum_{i=1}^{n} a_i(\overline{x},U)\frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Используя уравнение для $V(\overline{x},U)$**,** получим

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial U}{\partial x_i} = -\frac{1}{\frac{\partial V}{\partial U}} \bullet (-a_{n+1} \bullet \frac{\partial V}{\partial x_i}) = a_{n+1}.$$

Таким образом, получили, что $U = \varphi(\overline{x})$ удовлетворяет уравнению (27.3).

Теорема доказана.

Теорема 28.1 показывает, что для решения квазилинейного уравнения (27.3) достаточно решить линейное уравнение (28.1). Для линейного уравнения (28.1) мы имеем n первых интегралов

$\varphi_i(\overline{x}, U)$, $i \in [1, n]$, а его общее решение имеет вид

$$V = \Psi(\varphi_1(\overline{x}, U), ..., \varphi_n(\overline{x}, U)). \quad (28.2)$$

Выражение

$$\Psi(\varphi_1(\overline{x}, U), ..., \varphi_n(\overline{x}, U)) = 0 \quad (28.3)$$

дает нам неявное задание $U = F(\overline{x})$ - решение уравнения(27.3).

Для примера рассмотрим определение общего решения для квазилинейного уравнения

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = x. \quad (28.4)$$

Соответствующее ему линейное уравнение имеет вид

$$y^2\frac{\partial U}{\partial x}+xy\frac{\partial U}{\partial y}+x\frac{\partial U}{\partial z}=0. \qquad (28.5)$$

Имеем систему уравнений для характеристик

$$\frac{dx}{y^2}=\frac{dy}{xy}=\frac{dz}{x},$$

откуда находим два первых интеграла

$$\varphi_1=y^2-x^2 \text{ и } \varphi_2=z-\ln|y|.$$

Следовательно, общее решение уравнения (28.5)

записывается в виде $F(y^2-x^2, z-\ln|y|)=U$.

Тогда решение уравнения (28.4) $z=z(x,y)$ получаем в виде:

$$F(y^2-x^2, z-\ln|y|)=0,$$

где F – произвольная дифференцируемая функция.

Откуда находим

$$z=\ln|y|+f(y^2-x^2) \qquad (28.6),$$

где $f(t)$ - произвольная дифференцируемая функция.

Для определения функции $f(t)$ необходимо дополнительное условие. Например, поверхность (28.6) должна проходить через линию $x = 0,\ z = y^2$.

Тогда $z = \ln|y| + f(y^2) = y^2$.

Следовательно, имеем

$$f(t) = t - \ln\sqrt{t},\ t > 0. \qquad (28.7)$$

Подставив (28.7) в (28.6), находим решение задачи Коши для квазилинейного уравнения:

$$z = \ln|y| - \ln\sqrt{y^2 - x^2} + (y^2 - x^2).$$

Задачи к V главе.

1.Найти общее решение линейных уравнений в частных производных:

1.1 $(x+2y)\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

1.2 $(x-z)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (y-z)\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$

1.3 $(y+z)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (x+z)\dfrac{\partial u}{\partial y} + (x+y)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$

2.Найти общее решение неоднородных линейных уравнений в частных производных:

2.1 $e^x \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = ye^x$

2.2 $x\frac{\partial u}{\partial x} - 2y\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2$

2.3 $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy$

3.Найти общее решение квазилинейных уравнений в частных производных:

3.1 $xy\frac{\partial u}{\partial x} + (x-u)\frac{\partial u}{\partial y} = y \bullet u$

3.2 $(u-x)\frac{\partial u}{\partial x} + (u-yy)\frac{\partial u}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial z} = x + y$

3.3 $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = u^2(x-3y)$

3.4 $u\frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial u}{\partial y} = 2x \bullet u$

4. Решить задачу Коши для уравнений в частных производных первого порядка:

4.1 $\begin{cases} y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \text{при } x = 0 \ u = y^2 \end{cases}$

4.2 $$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \text{при } y = 1 \quad u = x \end{cases}$$

4.3 $$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u \\ \text{при } y = 1 \; u = 3x^3 \end{cases}$$

4.4 $$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2xy \\ \text{при } y = x^2 \; u = 2x^3 \end{cases}$$

4.5 $$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \dfrac{x^2 + y^2}{y^4} \end{cases}$$