ЧАСТЬ 2
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

ГЛАВА VI
Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

§29. Постановка краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

В отличие от задачи Коши, в которой все необходимые условия задаются в начальной точке, в краевых задачах часть условий задается в начальной точке, а другая часть условий – в конечной точке отрезка, на котором определено дифференциальное уравнение. Поэтому краевые задачи часто называют задачами с нелокальными условиями. Например, для нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка для вектор-функции $\bar{y}(x) = \ y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ краевая задача ставится следующим образом:

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \hat{A}\bar{y} + f(x), \quad 0 < x < l,$$

$$\gamma(\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} y_j (x = 0) = \mu_i, \quad i \in [1, m],$$

$$\Gamma(\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} y_j (x = l) = \nu_i, \quad i \in [1, s],$$

$$m + s = n.$$

Для линейного уравнения $n-го$ порядка краевая задача ставится с теми же краевыми условиями.

$$L_n(y) = y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_n y(x) = f(x),$$

$$x \in [0, l]$$

при $x=0$ $\quad \gamma_i(y) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij} y^{(j)}(x=0) = \mu_i, \quad i \in [1, m]$

при $x=l$ $\quad \Gamma_i(y) = \sum_{j=0}^{n-1} b_{ij} y^{(j)}(x=l) = \nu_i, \quad i \in [1, s],$

$$m + s = n.$$

В зависимости от выбора коэффициентов a_{ij} и b_{ij} можно получать различные виды краевых задач. Исследование уравнения $n-го$ порядка достаточно сложно. В нашем курсе мы подробно исследуем краевые задачи для уравнения второго порядка, которые наиболее часто встречаются на практике.

Наиболее просто ставится краевая задача для линейного уравнения второго порядка, т.к. в этом случае одно условие задается на конце отрезка при $x=0$, а другое краевое условие задается при $x=l$:

$$\begin{cases} L(u) = a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = F(x), x \in [0, l] \\ \gamma(u) = \alpha_1 u'(x=0) + \beta_1 u(x=0) = u_0, \\ \Gamma(u) = \alpha_2 u'(x=l) + \beta_2 u(x=l) = u_l. \end{cases}$$

Заменой искомой функции

$$u(x) = y(x) + \frac{[\alpha_2 + \beta_2(l-x)]u_0 + (\beta_1 x - \alpha_1)u_1}{\beta_1(\alpha_2 + \beta_2 l) - \alpha_1\beta_2}$$

граничные условия можно сделать однородными, и тогда получим задачу для функции $y(x)$ в виде

$$\begin{cases} L(y) = a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x), x \in \ 0,l \\ \gamma(y) = 0, \Gamma(y) = 0, \end{cases} \tag{29.1}$$

где

$$f(x) = F(x) -$$
$$-\frac{b(x)(\beta_1 u_l - \beta_2 u_0) + c(x)\ \alpha_2 + \beta_2(l-x)\ u_0 + (\beta_1 x - \alpha_1)u_l}{\beta_1(\alpha_2 + \beta_2 l) - \alpha_1\beta_2}$$

Для оператора $L(y)$ в (29.1) можно ввести сопряженный оператор $M(y)$, такой, что для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $z(x)$ выражение $z(x)L(y)$ есть производная некоторой функции, если $M(z) = 0$. Для вывода выражения для сопряженного дифференциального оператора рассмотрим выражение:

$$\int z(x)L(y)dx = \int (a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x))z(x)dx.$$

Проинтегрировав два раза по частям, получим:

$$\int z(x)L(y) = a(x)(z(x)y'(x) + z'(x)y(x)) +$$
$$+(b(x) - a'(x))z(x)y(x) +$$
$$+\int y(x)((a(x)z(x))'' - (b(x)z(x))' + c(x)z(x))dx.$$

Оператор, стоящий под интегралом справа в равенстве, и есть сопряженный с $L(y)$. Таким образом, имеем

$$M(z) = (a(x)z(x))'' - (b(x)z(x))' + c(x)z(x)\ ,$$

и должно выполняться соотношение:

$$\int (z(x)L(y) - y(x)M(z))dx =$$
$$= a(x)(z(x)y'(x) - z'(x)y(x)) + (b(x) - a'(x))z(x)y(x)$$

или

$$z(x)L(y) - y(x)M(z) =$$
$$\frac{d}{dx}(a(x)(z(x)y'(x) - z'(x)y(x)) + \tag{29.2}$$
$$+(b(x) - a'(x))z(x)y(x))$$

Полученное выражение называется условием Лагранжа.

Если сопряженный оператор $M(y) = L(y)$, то дифференциальный оператор $L(y)$ называется самосопряженным. Получим выражение для самосопряженного оператора. Из условия $M(y) = L(y)$ получаем

$$(ay)'' - (by)' + cy = ay'' + by' + cy$$

откуда получаем

$$ay'' + 2a'y' + a''y - by' - b'y = ay'' + by'$$

или

$$2(a' - b)y' + (a'' - b')y = 0$$

Это равенство превращается в тождество при любой функции $y(x) \in C_2$, если выполняется условие $b(x) = a'(x)$. При этом условии получаем самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка в виде:

$$L(y) = a(x)y'' + a'(x)y'(x) + c(x)y(x) =$$
$$= \frac{d}{dx}(a(x)\frac{dy}{dx}) + c(x)y(x)$$

В теории краевых задач для самосопряженного оператора обычно обозначают первый коэффициент $a(x) = p(x)$, а $c(x) = -q(x)$, причем считается, что $p(x) > 0$. В результате получаем краевую задачу в виде:

$$\begin{cases} L(y)=\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy}{dx}\right)-q(x)y(x)=f(x),\ x\in [0,l],\ p(x)>0 \\ \gamma(y)=\alpha_1 y'(0)+\beta_1 y(0)=0 \\ \Gamma(y)=\alpha_2 y'(l)+\beta_2 y(l)=0. \end{cases} \quad (29.3)$$

Формула Лагранжа (29.2) при $b(x)=a'(x), a(x)=p(x)$, $c(x)=-q(x)$ принимает более простой вид:

$$z(x)L(y)-y(x)L(z)=$$

$$=\frac{d}{dx}(p(x)(z(x)y'(x)-z'(x)y(x))) \quad (29.4)$$

Естественно, возникает вопрос о возможности существования решения однородной краевой задачи ($f(x)=0$).Однородное уравнение в общем случае имеет два линейно независимых решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, которые являются решениями задач Коши:

$$\begin{array}{ll} 1. L(y_1(x))=0, x\in[0,l] & 2. L(y_2(x))=0, x\in[0,l] \\ y_1(x=0)=1, & y_2(x=0)=0, \\ y_1'(x=0)=0, & y_2'(x=0)=1. \end{array} \quad (29.5)$$

Тогда общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

Постоянные C_1 и C_2 должны быть определены из граничных условий. Подставив общее решение в краевые условия (29.3) получим

$$\gamma(y)=\alpha_1C_2+\beta_1C_1=0,$$

$$\Gamma(y)=\alpha_2(C_1y_1'(l)+C_2y_2'(l))+\beta_2(C_1y_1(l)+C_2y_2(l))=0.$$

Определитель этой системы равен

$$D = \beta_1(\alpha_{21}y_2'(l) + \beta_2 y_2(l)) + \alpha_1(\alpha_2 y_1'(l) + \beta_2 y_1(l))$$

Если $D \neq 0$, то $C_1 = C_2 = 0$. В результате решение однородной краевой задачи $y(x) \equiv 0$. Однако, при определенных коэффициентах уравнения $p(x)$ и $q(x)$, возможен случай $D = 0$. Тогда имеем решение системы $C_2 = -\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}C_1$, и получаем решение однородной краевой задачи

$$y(x) = \varphi_0(x) = C_1(y_1(x) - \frac{\beta_1}{\alpha_1}y_2(x)). \quad (29.6)$$

Константу C_1 обычно находят из нормировки

$$\int_0^l \varphi_0^2(x)dx = 1.$$

Легко понять, что если решение однородной краевой задачи существует, то другого линейно независимого решения однородной краевой задачи не существует. Предположим, что существует два линейно независимых решения $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$. Они должны удовлетворять краевому условию при $x = 0$:

$$\begin{cases} \alpha_1\varphi_0'(x=0) + \beta_1\varphi_0(x=0) = 0, \\ \alpha_1\varphi_1'(x=0) + \beta_1\varphi_1(x=0) = 0. \end{cases}$$

Это однородная алгебраическая система для α_1 и β_1. Так как существует ненулевое решение системы, то определитель системы должен равняться нулю:

$$D = \varphi_0'(x=0)\varphi_1(x=0) - \varphi_0(x=0)\varphi_1(x=0) = 0.$$

Это определитель Вронского для решений дифференциального уравнения. Известно, что если определитель Вронского равен нулю в одной точке

(при $x = 0$), то он равен нулю при любом $x \in [0, l]$.
Следовательно, решения линейно зависимы, т.е.

$$\varphi_1(x) = C\varphi_0(x),$$

что и требовалось доказать.

§ 30 Формула Грина. Построение решения краевой задачи с помощью функции Грина.

Если проинтегрировать формулу Лагранжа (29.4), то получим формулу Грина:

$$\int_0^l zL(y) - yL(z)\ dx = \left[p(x)\left(z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx} \right) \right] \Big|_0^l \qquad (30.1)$$

Если $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют одним и тем же однородным граничным условиям, то $z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx} = 0$ при $x = 0$ и $x = l$. Откуда имеем

$$\int_0^l zL(y) - yL(z)\ dx = 0 \qquad (30.2)$$

при $\gamma(z) = \gamma(y) = 0;\ \Gamma(z) = \Gamma(y) = 0$.

С помощью формулы Лагранжа можно определить определитель Вронского для двух линейно независимых решений самосопряженного дифференциального оператора второго порядка.

Т е о р е м а **30.1. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - линейно независимые решения однородного уравнения $L(y)=0$, то их определитель Вронского равен**

$$\Delta(y_1, y_2) = \frac{C}{p(x)}, \tag{30.3}$$

причем при $y_1(x) \neq 0$, общее решение можно представить в виде:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C y_1(x) \int_0^x \frac{d\xi}{p(\xi) y_1^2(\xi)} \tag{30.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Из тождества Лагранжа (29.4) при $L(y_1) = L(y_2) = 0$ следует

$$\frac{d}{dx}(p(x)(y_2(x)\frac{dy_1}{dx} - y_1(x)\frac{dy_2}{dx})) = 0.$$

Следовательно,

$$p(x)(y_2(x)\frac{dy_1}{dx} - y_1(x)\frac{dy_2}{dx}) = C = \text{const}.$$

Т.к. $(y_2(x)\frac{dy_1}{dx} - y_1(x)\frac{dy_2}{dx} = \Delta(y_1, y_2)$ - определитель Вронского для функций $y_1(x), y_2(x)$, причем $\Delta(y_1, y_2) \neq 0$, в следствие линейной независимости $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Тогда получаем (30.3)

$$\Delta(y_1, y_2) = \frac{C}{p(x)}.$$

Если $y_1(x) \neq 0$, то разделив (30.3) на $y_1^2(x)$, получим

(при $y_2(x) = y(x)$), ($y(x)$ - независима от y_1)

$$\frac{y_1(x)y'(x) - y_1' y(x)}{y_1^2(x)} = \frac{C}{p(x) y_1^2(x)}$$

или

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{y_1(x)}\right)=\frac{C}{p(x)y_1^2(x)}.$$

Проинтегрировав, получим окончательно

$$y(x)=y_1(x)\left(C_1+C\int_0^x\frac{d\xi}{p(\xi)y_1^2(\xi)}\right),$$

т.е. получили выражение (30.4), *что и требовалось доказать.*

Если однородная краевая задача (29.3) имеет только тривиальное решение, то функцией Грина $G(x,\xi)$ называется решение краевой задачи, имеющей разрыв производной в точке $x=\xi$, причем этот разрыв равен $1/p(x)$. Таким образом функция Грина является решением следующей задачи:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dG}{dx}\right)-q(x)G=0, x\in[0,\xi)\cup(\xi,l]\\ \gamma(G)=\alpha_1\dfrac{dG(x=0,\xi)}{dx}+\beta_1G(x=0,\xi)=0,\\ \Gamma(G)=\alpha_2\dfrac{dG(x=l,\xi)}{dx}+\beta_2G(x=l,\xi)=0,\\ G(x=\xi+0,\xi)=G(x=\xi-0,\xi);\\ \dfrac{dG(x=\xi+0,\xi)}{dx}-\dfrac{dG(x=\xi-0,\xi)}{dx}=\dfrac{1}{p(\xi)}\end{cases}\qquad(30.5)$$

Заметим, что из постановки задачи (30.5) следует симметричность функции Грина $G(x,\xi) = G(\xi, x)$.

Пусть функция Грина существует и единственна (это будет доказано в следующем параграфе). Тогда справедливо следующее утверждение:

Т е о р е м а **30.2. Если однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то решение неоднородной краевой задачи существует для любой непрерывной на $[0,l]$ функции $f(x)$ и выражается через функцию Грина в виде**:

$$y(x) = \int_0^l G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi \quad . \tag{30.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о:

Единственность решения задачи (29.3) доказывается от противного. Пусть существуют два решения задачи (29.3) $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Тогда их разность $u(x) = y_1(x) - y_2(x)$ является решением однородной краевой задачи, которое, согласно условию теоремы, равно нулю. Следовательно, $y_1(x) = y_2(x)$.

Доказательство представления решения неоднородной задачи в виде (30.6), а, следовательно, и доказательство существования решения, т.к. функция Грина существует, проводится простой проверкой. Доказывается, что $y(x)$, представленная в виде (30.6), удовлетворяет всем условиям задачи (29.3).

Для этого нам необходимо вычислить производные от $y(x)$.Т.к. функция Грина $G(x,\xi)$ имеет разрыв производной в точке $x = \xi$, то запишем представление(30.6) в виде

$$y(x) = \int_0^x G(x,\xi) f(\xi) d\xi + \int_x^l G(x,\xi)\, f(\xi) d\xi \,, \tag{30.7}$$

В (30.7) имеем интеграл с переменным пределом, одновременно зависящий от x как от параметра. Производная от таких интегралов вычисляется по следующим формулам:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x K(x,\xi)u(\xi)d\xi = K(x,x-0)\cdot u(x)+\int_0^x \frac{\partial K(x,\xi)}{\partial x}u(\xi)d\xi,$$

$$\frac{d}{dx}\int_x^l K(x,\xi)u(\xi)d\xi = -K(x,x+0)\cdot u(x)+\int_x^l \frac{\partial K(x,\xi)}{\partial x}u(\xi)d\xi.$$

Продифференцировав по x выражение (30.7) , получим

$$y'(x)=\int_0^x \frac{dG\ \ x,\xi}{dx} f\ \ \xi\ \ d\xi\ +\int_x^l \frac{dG\ \ x,\xi}{dx} f\ \ \xi\ \ d\xi,$$

$$p(x)y'(x)\ \ ' = \int_0^x \frac{d}{dx}\left(p\frac{dG}{dx}\right) f\ \ \xi\ \ d\xi\ +\int_x^l \frac{d}{dx}\left(p\frac{dG}{dx}\right) f\ \ \xi\ \ d\xi\ +$$

$$+p(x)f(x)\frac{dG\ \ x,\xi}{dx}\ \Big|_{\xi\ =x-0} - f(x)p(x)\frac{dG\ \ x,\xi}{dx}\ \Big|_{\xi\ =x+0}.$$

Учитывая, что $\left[\frac{dG}{dx}\right]_{x=\xi} = -\left[\frac{dG}{dx}\right]_{\xi=x} = \frac{1}{p(x)}$,

получим

$$p(x)y'(x)\ \ ' = \int_0^x \frac{d}{dx}\left(p\frac{dG}{dx}\right) f\ \ \xi\ \ d\xi + \int_x^l \frac{d}{dx}\left(p\frac{dG}{dx}\right) f\ \ \xi\ \ d\xi + f(x).$$

Откуда получаем

$$L(y)=\int_0^x L(G)f(\xi)d\xi+\int_x^l L(G)f(\xi)d\xi+f(x).$$

Учитывая, что $L(G)=0$ при $\xi\in[0,x)$ и $\xi\in(x,l]$, получаем $L(y)=f$. Следовательно, $y(x)$, представленная в виде (30.7), является решением уравнения. Краевые условия для

$y(x)$ при $x = 0$ и $x = l$ выполняются, т.к. этим условиям удовлетворяет функция Грина.

§ 31. Существование и единственность функции Грина.

Нам необходимо доказать, что функция Грина как решение задачи (30.5) существует, и это решение единственно. Легко показать, что функция Грина $G(x,\xi)$ является единственным решением задачи (30.5). Для этого предположим, что задача (30.5) имеет два решения $G_1(x,\xi)$ и $G_2(x,\xi)$. Введем разность этих функций

$$U(x,\xi) = G_1(x,\xi) - G_2(x,\xi).$$

Из условий сопряжений следует

$$U(x=\xi+0,\xi) = U(x=\xi-0,\xi);$$
$$\frac{dU(x=\xi+0,\xi)}{dx} = \frac{dU(x=\xi-0,\xi)}{dx}$$

Т.к. коэффициенты уравнения $p(x) \in C_1, q(x) \in C$, а $U \in C_1$,то это означает, что непрерывна $\dfrac{d^2U}{dx^2}$.

Следовательно,$U(x,\xi)$ является решением однородной краевой задачи

$$L(U) = 0 \text{ при } x \in [0,l],$$
$$\gamma(U) = 0 \text{ и } \Gamma(U) = 0.$$

Согласно условию определения функции Грина, однородная задача имеет только тривиальное решение $U(x,\xi) = 0.$ Следовательно, имеем единственность функции Грина $G_1(x,\xi) = G_2(x,\xi)$.

Докажем теперь существование функции Грина.

Т е о р е м а **31.1. Решение задачи (30.5) для функции Грина существует.**

Теорема доказывается прямым построением функции Грина в виде

$$G(x)=\begin{cases} C_1 y_1(x), 0\le x\le \xi, \\ C_2 y_2(x), \xi \le x\le l, \end{cases} \qquad (31.1)$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - решения задач Коши

а. При $0\le x\le \xi$

$L(y_1)=0$,

$y_1(0)=-\alpha_1$,

$y_1'(0)=\beta_1$.

б. При $\xi \le x\le l$

$L(y_2)=0$,

$y_2(l)=-\alpha_2$,

$y_2'(l)=\beta_2$.

Заметим, что

$\gamma(y_1)=0$, $\quad \Gamma(y_2)=0$,

$\alpha_1^2+\beta_1^2\ne 0$. $\quad \alpha_2^2+\beta_2^2\ne 0$.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ существуют, согласно теореме существования решения задачи Коши. Причем функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы. Если бы они были зависимы, т.е. $y_1(x)=C\,y_2(x)$, то $y_1(x)$ удовлетворяла как краевому условию $\gamma(y_1)=0$, так и краевому условию $\Gamma(y_1)=C\Gamma(y_2)=0$.Это означало бы, что $y_1(x)$ - решение однородной краевой задачи, которое по условию тождественно равно нулю.

Заметим, что представленная в виде (31.1) функция Грина, удовлетворяет уравнению и краевым условиям:

$L(G)=0$ при $x\in[0,\xi)$, $x\in(\xi,l]$..

При $x=0$, $x=l$ выполняются краевые условия $\gamma(G)=\Gamma(G)=0$.

Осталось доказать, что можно подобрать C_1 и C_2 так, чтобы выполнялись условия сопряжения при $x=\xi$:

$$G\big|_{x=\xi} = C_2 y_2(\xi) - C_1 y_1(\xi) = 0,$$

$$\left[\frac{dG}{dx}\right]_{x=\xi} = C_2 y_2'(\xi) - C_1 y_1'(\xi) = 1/p(\xi) .$$

Из этой системы находим

$$C_1 = \frac{y_2(\xi)}{p(\xi)\Delta(y_1, y_2)};$$

$$C_2 = \frac{y_1(\xi)}{p(\xi)\Delta(y_1, y_2)}$$

Согласно (30.3), $p(\xi)\Delta(y_1, y_2)=C=\text{const}$.

Тогда, подставив C_1 и C_2 в (31.1), найдем функцию Грина:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)y_2(\xi)}{C}, & 0 \le x \le \xi, \\ \dfrac{y_1(\xi)y_2(x)}{C}, & \xi \le x \le l. \end{cases}$$

Легко видеть, что $G(x,\xi) = G(\xi, x)$. Существование функции Грина для случая, когда однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, доказано.

§ 32. Постановка краевой задачи при существовании решения однородной задачи.

Пусть существует отличная от нуля функция $\varphi_0(x)$, которая является решением однородной краевой задачи.

$$\begin{cases} L(\varphi_0(\mathrm{x})\ ) = 0\ ,\ \ x \in [0, l], \\ \gamma(\varphi_0) = 0,\ \Gamma(\varphi_0) = 0 \end{cases} \qquad (32.1)$$

Как было показано выше, другого решения, линейно независимого к $\varphi_0(x)$,не существует. Т.к. любое $y(x) = C\varphi_0(x)$ является решением задачи (32.1), то для выделения единственного решения однородной краевой задачи вводится нормировка:

$$\int_0^l \varphi_0{}^2(x)dx = 1. \qquad (32.2)$$

Докажем два условия, которым должна удовлетворять постановка краевой задачи при существования решения однородной задачи. Эти условия, добавленные к постановке неоднородной краевой задачи

$$\begin{cases} L(y) = f(x)\ ,\ \ x \in [0, l], \\ \gamma(y) = 0,\ \Gamma(y) = 0 \end{cases} \qquad (32.3)$$

должны гарантировать существование и единственность решения.

Наиболее просто решается вопрос о единственности решения. На этот вопрос отвечает следующая лемма.

***Лемма* 32.1. Однородная краевая задача с дополнительным условием ортогональности решения к $\varphi_0(x)$ имеет только тривиальное решение**.

Доказательство.

Дана задача

$$\begin{cases} L(y) = 0, \\ \gamma\ (y) = \Gamma(y) = 0, \\ \int\limits_0^l \varphi_0(x) y(x) dx = 0. \end{cases} \tag{32.4}$$

Решение однородной краевой задачи имеет единственное решение $\varphi_0(x)$. Следовательно, решение нашей задачи имеет решение $y(x) = C\varphi_0(x)$. Подставив $y(x)$ в дополнительные условия, получим

$$\int\limits_0^l y(x)\varphi_0(x)dx = C\int\limits_0^l \varphi_0{}^2(x)dx = C = 0 \quad ,$$

Откуда следует $y(x) \equiv 0$. Однородная краевая задача с дополнительным условием ортогональности решения к решению однородной задачи имеет только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

Доказанная лемма позволяет доказать единственность решения неоднородной краевой задачи.

Т е о р е м а **32.1. Неоднородная краевая задача с условием ортогональности решения к решению однородной задачи имеет единственное решение.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимо доказать единственность решения следующей краевой задачи

$$\begin{cases} L(y) = f(x), \quad x \in [0,l] \\ \gamma(y) = 0,\ \Gamma(y) = 0 \\ \int\limits_0^l y(x)\varphi_0(x)dx = 0. \end{cases}$$

Пусть данная задача имеет два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Тогда разность этих решений $u(x) = y_1(x) - y_2(x)$ удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} L(u) = 0, \quad x \in [0,l] \\ \gamma(u) = 0,\ \Gamma(u) = 0 \\ \int\limits_0^l u(x)\varphi_0(x)dx = 0. \end{cases}$$

Согласно лемме 32.1, такая задача имеет только тривиальное решение $u(x) \equiv 0$. Следовательно, $y_2(x) = y_1(x)$, *что и требовалось доказать.*

Решение неоднородной задачи $y(x)$ должно быть связано с решением однородной задачи. Отсюда следует следующее утверждение

Т е о р е м а **32.2. Необходимым условием разрешимости неоднородной краевой задачи является ортогональность правой части уравнения** $f(x)$ **к решению однородной задачи** $\varphi_0(x)$ **.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем две задачи:

$$\begin{cases} L(y) = f(x), \\ \gamma\ (y) = 0,\ \Gamma(y) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} L(\varphi_0) = 0, \\ \gamma(\varphi_0) = \Gamma(\varphi_0) = 0, \\ \int\limits_0^l \varphi_0{}^2(x)dx = 1, \end{cases}$$

Применяя формулу Грина и учитывая, что $y(x)$ и $\varphi_0(x)$ удовлетворяют одним и тем же краевым условиям,
получим

$$\int\limits_0^l \varphi_0(x)L(y(x)) - y(x)L(\varphi_0)\ dx = 0.$$

Откуда

$$\int\limits_0^l f(x)\varphi_0(x)dx = 0, \tag{32.5}$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что полученное условие (32.5), согласно теореме 32.2, является необходимым условием существования решения краевой задачи. Ниже мы докажем, что условие является также и достаточным.

Таким образом, мы приходим к следующей постановке неоднородной краевой задачи:

$$\begin{cases} L(y) = f(x), \quad x \in (0,l), \\ \gamma\ (y) = 0,\ \Gamma(y) = 0, \\ \int\limits_0^l f(x)\varphi_0(x)dx = 0, \quad \int\limits_0^l y(x)\varphi_0(x)dx = 0, \end{cases} \tag{32.6}$$

т.е. введены дополнительные условия ортогональности правой части и решения к решению однородной краевой задачи $\varphi_0(x)$.

Заметим, что если однородная задача имеет только тривиальное решение $\varphi_0(x) \equiv 0$, то дополнительные условия выполняются автоматически, и мы получаем обычную неоднородную краевую задачу.

§ 33.Обобщенная функция Грина и представление решения неоднородной задачи, если существует решение однородной задачи.

Наша цель представить решение краевой задачи (32.6) для случая существования решения однородной краевой задачи $\varphi_0(x)$ через функцию Грина $G_0(x,\xi)$:

$$y(x) = \int\limits_0^l f(\xi)G_0(x,\xi)d\xi, \tag{33.1}$$

где $G_0(x,\xi)$ - обобщенная функция Грина. Согласно условиям задачи (32.6), решение должно быть ортогонально к $\varphi_0(x)$. Это означает, что обобщенная функция Грина должна быть ортогональна к $\varphi_0(x)$, т.е. должно выполняться условие

$$\int_0^l G_0(x,\xi)\varphi_0(x)dx = 0. \tag{33.2}$$

Выше мы имели задачу для функции Грина, если однородная краевая задача имеет только тривиальное решение $\varphi_0(x) \equiv 0$. Для функции Грина $G(x,\xi)$ условие (33.2) не выполняется. Для того, чтобы для $G_0(x,\xi)$ условие (33.2) выполнялось, мы можем уравнение для $G_0(x,\xi)$ сделать неоднородным, следовательно, вместо задачи (30.5) для обобщенной функции Грина мы введем новую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dG_0}{dx}\right) - q(x)G_0(x,\xi) = \psi(x,\xi), x \in [0,\xi) \cup (\xi,l] \\ \gamma(G_0) = 0; \Gamma(G_0) = 0, \\ G_0(x = \xi + 0, \xi) = G_0(x = \xi - 0, \xi); \\ \dfrac{dG_0(x = \xi + 0, \xi)}{dx} - \dfrac{dG_0(x = \xi - 0, \xi)}{dx} = \dfrac{1}{p(x)} \end{cases} \tag{33.3}$$

Кроме того, должно выполняться условие (33.2). Нам необходимо определить, чему равна функция $\psi(x,\xi)$, чтобы выполнялось условие (33.2).

Для этого применим формулу Грина к функции Грина $G_0(x,\xi)$ и решению однородной краевой задачи $\varphi_0(x)$ на отрезках $x \in [0,\xi)$ и $x \in (\xi,l]$. В результате получим:

$$\int_0^{\xi}(\varphi_0(x)L(G_0)-G_0(x,\xi)L(\varphi_0))dx =$$

$$= p(\xi)(\varphi_0(\xi)\frac{\partial G_0}{\partial x}\bigg|_{x=\xi-0} - G_0(x,\xi)\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\bigg|_{x=\xi-0}$$

$$\int_{\xi}^{l}(\varphi_0(x)L(G_0)-G_0(x,\xi)L(\varphi_0))dx =$$

$$= -p(\xi)(\varphi_0(\xi)\frac{\partial G_0}{\partial x}\bigg|_{x=\xi+0} - G_0(x,\xi)\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\bigg|_{x=\xi+0}$$

Сложив эти выражения и учитывая условия задачи (33.3) для $G_0(x,\xi)$ и задачи (32.1) для $\varphi_0(x)$, получим :

$$\int_0^l \varphi_0(x)\psi(x,\xi)dx =$$

$$= -p(\xi)\left(\frac{dG_0(x=\xi+0,\xi)}{dx} - \frac{dG_0(x=\xi-0,\xi)}{dx}\right)\varphi_0(\xi)$$

или $\int\limits_0^l \varphi_0(x)\psi(x,\xi)dx = -\varphi_0(\xi)$.

Последнее равенство выполняется, если $\psi(x,\xi) = -\varphi_0(x)\varphi_0(\xi)$. В результате мы получаем задачу для обобщенной функции Грина:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dG_0}{dx} \right) - q(x)G_0(x,\xi) = -\varphi_0(x)\varphi_0(\xi), x \in [0,\xi) \cup (\xi,l] \\ \gamma(G_0) = 0; \Gamma(G_0) = 0, \\ G_0(x=\xi+0,\xi) = G_0(x=\xi-0,\xi); \\ \dfrac{dG_0(x=\xi+0,\xi)}{dx} - \dfrac{dG_0(x=\xi-0,\xi)}{dx} = 1/p(\xi) \\ \int\limits_0^l G_0(x,\xi)\varphi_0(x)dx = 0 \end{cases} \qquad (33.4)$$

Из постановки задачи следует, что $G_0(x,\xi) = G_0(\xi, x)$. Заметим, что при $\varphi_0(x)$=0 (решение однородной краевой задачи только тривиальное), обобщенная функция Грина $G_0(x,\xi)$ превращается в обычную функцию Грина.

Для вывода представления решения неоднородной задачи через обобщенную функцию Грина применим формулу Грина к $G_0(x,\xi)$ и $y(x)$ на отрезках $x \in [0,\xi)$ и $x \in (\xi, l]$.

Тогда имеем:

$$\int_0^{\xi}(y(x)L(G_0)-G_0(x,\xi)L(y))dx=$$

$$=p(\xi)(y(\xi)\left.\frac{\partial G_0}{\partial x}\right|_{x=\xi-0}-G_0(\xi,\xi)y'(\xi)),$$

$$\int_{\xi}^{l}(y(x)L(G_0)-G_0(x,\xi)L(y))dx=$$

$$=-p(\xi)(y(\xi)\left.\frac{\partial G_0}{\partial x}\right|_{x=\xi+0}-G_0(\xi,\xi)y'(\xi)).$$

Сложив равенства и учитывая свойства задачи (33.4) и задачи (32.6), получим:

$$\int_0^{l}(y(x)\varphi_0(x)\varphi_0(\xi)dx-\int_0^{l}G_0(x,\xi)f(x)dx=-y(\xi).$$

Т.к. $y(x)$ ортогональна к $\varphi_0(x)$, получаем

$$y(\xi)=\int_0^{l}G_0(x,\xi)f(x)dx,$$

или, учитывая что $G_0(x,\xi)=G_0(\xi,x)$, получим:

$$y(x)=\int_0^{l}G_0(x,\xi)f(\xi)d\xi, \qquad (33.5)$$

***Т е о р е м а* 33.1. Необходимым и достаточным условием однозначности и разрешимости неоднородной краевой задачи является условие ортогональности правой части уравнения к собственной функции $\varphi_0(x)$. При этом**

решение представляется через обобщенную функцию Грина в виде:

$$y(x)=\int_0^l G_0(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

и оно ортогонально к $\varphi_0(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проводится путем прямой проверки того, что представление (33.5) удовлетворяет всем условиям задачи (32.6):

$$\begin{cases} L(y)=f(x),\quad x\in\ 0,l\ , \\ \gamma\ (y)=0, \Gamma(y)=0, \\ \int_0^l (f(x)\varphi_0(x)dx=0; \int_0^l y(x)\varphi_0(x)dx=0. \end{cases},$$

где $\varphi_0(x)$ решение однородной краевой задачи. Т.к. нам будет необходимо вычислить производные от представления (33.5), а функция Грина $G_0(x,\xi)$ терпит разрыв при $x=\xi$, то запишем (33.5) в виде:

$$y(x)=\int_0^x G_0(x,\xi)f(\xi)d\xi+\int_x^l G_0(x,\xi)f(\xi)d\xi.$$

Продифференцировав, получим:

$$y'(x) = G_0\left(x,\xi = x - 0\right) f(x) + \int_0^x \frac{dG_0\left(x,\xi\right)}{dx} f\left(\xi\right) d\xi -$$

$$-G_0\left(x,\xi = x + 0\right) f(x) + \int_x^l \frac{dG\left(x,\xi\right)}{dx} f\left(\xi\right) d\xi.$$

Поскольку функция Грина непрерывна в точке $x = \xi$, то в итоге получим

$$y'(x) = \int_0^x \frac{dG_0\left(x,\xi\right)}{dx} f\left(\xi\right) d\xi + \int_x^l \frac{dG\left(x,\xi\right)}{dx} f\left(\xi\right) d\xi.$$

Если y и y' подставить в краевые условия при $x = 0$ и $x = l$, то получим

$$\gamma(y) = \int_0^l \gamma(G_0(0,\xi)) f\left(\xi\right) d\xi, \Gamma(y) = \int_0^l \Gamma(G_0(l,\xi)) f\left(\xi\right) d\xi.$$

Функция Грина удовлетворяет краевым условиям. Следовательно, $y(x)$, представленная формулой (33.5), также удовлетворяет краевым условиям.

Теперь вычислим производную

$$p(x)y'(x)\ {}' = \frac{d}{dx}\int_0^x p(x)\frac{dG_0(x,\xi)}{dx} f\ \ \xi\ \ d\xi +$$

$$+\frac{d}{dx}\int_x^l p(x)\frac{dG_0(x,\xi)}{dx} f\ \ \xi\ \ d\xi =$$

$$= p(x)\frac{dG_0\ \ x,\xi}{dx}\ \Big|_{\xi\ \ =x-0} f(\xi) - \int_0^x \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dG_0}{dx}\right) f\ \ \xi\ \ \ d\xi\ \text{-}$$

$$- p(x)\frac{dG_0\ \ x,\xi}{dx}\ \Big|_{\xi\ \ =x+0} f(\xi) + \int_x^l \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dG_0}{dx}\right) f\ \ \xi\ \ \ d\xi\ .$$

Так как

$$\frac{dG_0\ \ x,\xi}{dx}\ \Big|_{\xi\ \ =x+0} - \frac{dG_0\ \ x,\xi}{dx}\ \Big|_{\xi\ \ =x-0} = \frac{1}{p(x)},$$

то окончательно имеем

$$p(x)y'(x)\ {}' = \int_0^x \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dG_0(x,\xi)}{dx}\right) f\ \ \xi\ \ \ d\xi\ \ +$$

$$\int_x^l \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dG_0(x,\xi)}{dx}\right) f\ \ \xi\ \ \ d\xi\ + f(x).$$

Полученные выражения дают нам возможность вычислить дифференциальный оператор нашей задачи

$$L(y) = \int_0^x L\ \ G_0\ \ \ f\ \ \xi\ \ \ d\xi\ \ + \int_x^l L\ \ G_0\ \ \ f\ \ \xi\ \ \ d\xi\ \ + f(x).$$

Так как обобщенная функция Грина удовлетворяет уравнению

$L(G_0) = -\varphi(\xi)\varphi_0(x),\ x \in [0,\xi)$ и $x \in (\xi, l]$, то в итоге получаем, что

$$L(y) = -\varphi_0(x)\int_0^l \varphi_0(\xi) f\ \ \xi\ \ d\xi + f(x). \qquad (33.6)$$

Из (33.6) следует, что $y(x)$, представленная в виде (33.5), тогда и только тогда является решением задачи (32.6), когда правая часть уравнения $f(x)$ ортогональна к $\varphi_0(x)$.

Осталось проверить еще условие ортогональности $y(x)$ и $\varphi_0(x)$. Это следует из ортогональности функции Грина $G_0(x,\xi)$ и $\varphi_0(x)$:

$$\int_0^l y\ \ x\ \ \varphi_0(x)dx = \int_0^l f\ \ \xi\ \ d\xi \int_0^l G\ \ x,\xi\ \ \varphi_0(x)dx = 0,$$

что и требовалось доказать.

Все выше сказанное делалось при условии существования обобщенной функции Грина как решения задачи (33.4). Поэтому необходимо доказать следующую теорему.

***Т е о р е м а* 33.2. Решение задачи (33.1) для обобщенной функции Грина существует и единственно.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть нам известна некоторая функция $g(x,\xi)$, являющаяся решением задачи (33.4) без условия ортогональности к $\varphi_0(x)$, т.е.

$$\begin{cases} L(g) = -\varphi_0(x)\varphi_0(\xi), x \in [0,\xi) \cup (\xi, l] \\ \gamma\ (g) = 0;\ \ \Gamma(g) = 0 \\ g(x = \xi + 0, \xi) = g(x = \xi - 0, \xi); \\ \dfrac{dg(x = \xi + 0, \xi)}{dx} - \dfrac{dg(x = \xi - 0, \xi)}{dx} = {}^{1}\!/_{p(\xi)} \end{cases} \qquad (33.7)$$

Тогда обобщенную функцию Грина, являющуюся решением задачи (33.4), можно представить в виде:

$$G_0(x,\xi) = g(x,\xi) + C\varphi_0(x).$$

Константа C определяется из условия ортогональности $G_0(x,\xi)$ к $\varphi_0(x)$.

Тогда

$$\int_0^l g\ \ x,\xi\ \ \varphi_0\ \ x\ \ dx\ \ + C\int_0^1 \varphi_0^2\ \ x\ dx = 0$$

Откуда имеем

$$C(\xi) = -\int_0^l g\ \ x,\xi\ \ \varphi_0\ \ x\ \ dx$$

Окончательно, имеем представление обобщенной функции Грина в виде

$$G_0(x,\xi) = g(x,\xi) - \varphi_0(x)\int_0^l g(x,\xi)\varphi_0(x)dx \qquad (33.8)$$

Это единственное решение задачи (33.4). Для доказательства существования $G_0(x,\xi)$ необходимо построить функцию $g(x,\xi)$.

Для этого введем две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, являющихся решениями следующих задач Коши:

$$\begin{cases} L(y_1) = -\varphi_0(x)\ ,\ \ x \in [0,l], \\ y_1(x=0) = \alpha_1, \\ y_1'(x=0) = -\beta_1, \end{cases} \qquad (33.9)$$

$$\begin{cases} L(y_2) = -\varphi_0(x)\ ,\ \ x \in [0,l], \\ y_2(l) = \alpha_2, \\ y_1'(l) = -\beta_2, \end{cases} \qquad (33.10)$$

Заметим, что $\gamma(y_1)=0$ и $\Gamma(y_2)=0$. Причем $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимые функции. Докажем это утверждение. Предположим, что $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы, т.е. $y_1(x)=Cy_2(x)$. Это означает, что $\Gamma(y_1)=\Gamma(Cy_2)=C\Gamma(y_2)=0$. Таким образом получаем, что $y_1(x)$ является решением краевой задачи

$$\begin{cases} L(y_1) = -\varphi_0(x), \\ \gamma\ (y_1) = 0,\ \Gamma(y_1) = 0. \end{cases}$$

Это невозможно, т.к. выше было доказано, что решение неоднородной краевой задачи существует при выполнении условия ортогональности правой части к $\varphi_0 \quad x$ - решению однородной задачи. Это условие в нашем случае не выполняется. Следовательно, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - линейно независимы.

Определив функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, построим функцию $g\ \ x,\xi$ в виде:

$$g\ \ x,\xi\ =\begin{cases} y_1(x)\varphi_0(\xi) & \text{при } x\in[0,\xi), \\ y_2(x)\varphi_0(\xi)+C\varphi_0(x) & \text{при } x\in(\xi,l]. \end{cases} \qquad (33.11)$$

При таком представлении $g\ \ x,\xi$ удовлетворяет) всем условиям задачи (33.7), кроме условия сопряжения при $x=\xi$. Подставив (33.11) в условия сопряжения, получим

$$\begin{cases} y_2(x)\varphi_0(\xi)+C\varphi_0(\xi)-y_1(\xi)\varphi_0(\xi)=0 \\ y_2'(x)\varphi_0(\xi)+C\varphi_0'(\xi)-y_1'(\xi)\varphi_0(\xi)=1/\ p(\xi) \end{cases} \qquad (33.12)$$

Это два уравнения для одного неизвестного *C*.
Из первого уравнения находим:

$$C=y_1(\xi)-y_2(\xi) \qquad (33.13)$$

Подставив выражение (33.13) во второе уравнение, получим условие разрешимости системы (33.12

$$(y_2'(x)-y_1'(\xi))\varphi_0(\xi)+(y_1(x)-y_2(\xi))\varphi_0'(\xi)=1/\ p(\xi) \quad (33.14)$$

Покажем, что условие (33.14) выполняется. Для этого применим формулу Грина к функциям $y_1(x)$ и $\varphi_0(x)$ на отрезке $[0,\xi]$. Тогда имеем:

$$\int_0^{\xi}(y_1(x)L\ \ \varphi_0\ \ -\varphi_0(x)L\ \ y_1\ \ )dx=$$

$$=\ p(\xi)(y_1(\xi)\varphi_0'(\xi)-y_1'(\xi)\varphi_0(x))-p(0)(y_1(0)\varphi_0'(0)-y_1'(0)\varphi_0(0))$$

Т.к. $\gamma(y_1)=0$ и $\gamma(\varphi_0)=0$, то $y_1(0)\varphi_0'(0)-y_1'(0)\varphi_0(0)=0$. Учитывая, что $L\ \varphi_0\ =0,\ \ L\ y_1\ =-\varphi_0(x))$, получим окончательно

$$\int_0^{\xi}\varphi_0^2(x)dx=p(\xi)(y_1(\xi)\varphi_0'(\xi)-y_1'(\xi)\varphi_0(\xi)) \qquad (33.15)$$

Аналогично, применив формулу Грина к функциям $y_2(x)$ и $\varphi_0(x)$ на отрезке $[\xi,l]$, найдем

$$\int_{\xi}^{l}\varphi_0^2(x)dx=-p(\xi)(y_2(\xi)\varphi_0'(\xi)-y_2'(\xi)\varphi_0(\xi)) \qquad (33.16)$$

Сложив (33.15) и (33.16) и учитывая нормировку $\varphi_0(x)$, получим:

$$1=p(\xi)((y_1(\xi)-y_2(\xi))\varphi_0'(\xi)-(y_1'(\xi)-y_2'(\xi))\varphi_0(\xi)), \qquad (33.17)$$

Легко видеть, что (33.17) совпадает с (33.14), т.е. условие разрешимости системы (33.12) выполняется, и мы нашли правильное *С*. Подставив (33.13) в (33.11), получим, окончательно,

$$g\ \ x,\xi\ =\begin{cases} y_1(x)\varphi_0(\xi), \\ y_2(x)\varphi_0(\xi)+(y_1(\xi)-y_2(\xi))\varphi_0(x) \end{cases} \qquad (33.18)$$

Таким образом доказано существование функции $g\ \ x,\xi$, а, следовательно, и существование $G_0(x,\xi)$, которая определяется через $g\ \ x,\xi$ по формуле (33.8).

§ 34. Поведение решения краевой задачи в окрестности $x=0$, если $p(x=0)=0$.

При исследовании краевой задачи считалось, что первый коэффициент уравнения $p(x)>0$. Если $p(x)$ в некоторой точке x_0 обращается в ноль, то дифференциальный оператор вырождается в алгебраический. В этом случае задача рассматривается раздельно на интервале до точки x_0 и после точки x_0, а в точке x_0 должны быть введены дополнительные условия, которые обеспечивают существование и единственность решения задачи. Ясно, что без ограничения общности в качестве такой точки можно взять $x_0 = 0$. В этом случае у нас отсутствует краевой условие при $x = 0$. Необходимо ввести новое условие, которое гарантировало бы единственность решения краевой задачи. Как мы увидим в дальнейшем, таким условием является ограниченность решения в точке $x = 0$. Для доказательства этого утверждения рассмотрим поведение решения краевой задачи в окрестности точки $x = 0$, в которой коэффициент $p(x)$ обращается в ноль.

Поведение решения краевой задачи в окрестности точки $x = 0$ зависит от того, как обращается в ноль $p(x)$. Мы рассмотрим случай линейного обращения в ноль, т.е. будем считать $p(x) = x\cdot\varphi(x),\ \varphi(x) > 0.$ В результате приходим к следующей краевой задаче:

$$L(y) = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y(x) = 0,\quad x \in\ 0,l\ ,$$

$$\alpha\ y'(l) + \beta\ y(l) = 0, p(x) = x\cdot\varphi(x), \varphi(x) > 0. \qquad (34.1)$$

Докажем следующее утверждение

***Лемма* 34.1 Если в задаче (34.1) коэффициент $q(x)$ ограничен, то для ограниченного решения $y_1(x)$ этой задачи выполняется условие**

$$\lim_{x\to 0} p(x)y_1'(x) = 0 \qquad (34.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т во.

Проинтегрируем уравнение (34.1) при $y = y_1(x)$, где y_1 - ограниченная функция.

$$\int_x^{x_1} \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy_1}{dx}\right)dx = \int_x^{x_1} q(x)y_1(x)dx, 0 < x < x_1 < l.$$

Откуда

$p(x)y_1'(x) = Q(x)$ где

$$Q(x) = p(x_1)y_1'(x_1) - \int_x^{x_1} q(\xi)y_1(\xi)d\xi. \qquad (34.3)$$

Из ограниченности $q(x)$ следует ограниченность $Q(x)$**,** откуда получаем

$$\lim_{x\to 0} p(x)y_1'(x) = \lim_{x\to 0} Q(x) = C\,\mathbf{.}$$

Покажем, что C=0.

Из (34.3) имеем

$$y_1'(x) = \frac{Q(x)}{p(x)} = \frac{Q(x)}{x\varphi(x)}.$$

Откуда после интегрирования от x до x_1 получаем, что

$$y_1(x) = y_1(x_1) - \int_x^{x_1} \frac{Q(\xi)d\xi}{\xi\varphi(\xi)}, \varphi(x) > 0 \qquad (34.4)$$

Т.к. решение $y_1(x)$ - ограничено, то при $x \to 0$ интеграл в (34.4) должен сходится, т.е.

$$\lim_{x\to 0}\int_x^{x_1} \frac{Q(\xi)d\xi}{\xi\varphi(\xi)} = y_1(x_1) - \lim_{x\to 0} y_1(x) < C_0.$$

В подынтегральной функции знаменатель стремится к нулю при $\xi \to 0$. Поэтому , чтобы интеграл сходился, необходимо выполнение условия

$$\lim_{x\to 0} p(x)y_1'(x) = \lim_{x\to 0} Q(x) = 0.$$

Лемма доказана.

Используя результат леммы 34.1 можно доказать основную теорему о поведении решения в точке $x=0$, если в этой точке первый коэффициент дифференциального уравнения обращается в ноль.

Т е о р е м а **34.1 Если** $y_1(x),\ y_2(x)$ **независимые решения уравнения** $L(y_i)=0,\ i\in[1,2]$**, а** $p(x)=x\varphi(x),\ \varphi(x)>0,\ x\in[0,l]$**, то если** $y_1(x)$**- ограниченная** $\lim\limits_{x\to 0} y_1(x) = C < \infty$**, то** $y_2(x)$**- неограниченная функция при** $x\to\infty$

Д о к а з а т е л ь с т в о базируется на формуле (30.4), выражающей одно линейно независимое решение $y_2(x)$ через другое $y_1(x)$.

$$y_2 = y_1\left\{C_1 + C\int_x^{x_0} \frac{d\xi}{p(\xi)y_1^2(\xi)}\right\}, 0<x<x_0 \qquad (34.5)$$

Пусть $y_1(x=0)=const\neq 0$.Тогда при $p(x)=x\varphi(x)$ интеграл в (34.5), равный $\int\limits_x^{x_0} \dfrac{d\xi}{\xi\varphi(\xi)y_1'(\xi)} \to \infty$ при $x\to 0$,

а, следовательно, $y_2(x)\to\infty$ при $x\to 0$. Получим, что $y_2(x)$ является неограниченной функцией.

Более сложно исследовать случай, когда $y_1(x) \to 0$ при $x \to 0$, т.к. в выражении (34.5) мы получаем неопределенность при $x \to 0$. Ее можно раскрыть по правилу Лопиталя.

Для этого представим (34.5) в виде

$$y_2 = \left\{ C_1 + C \int_x^{x_0} \frac{d\xi}{\xi \varphi(\xi) y_1'(\xi)} \right\} : \frac{1}{y_1(x)}$$

Тогда имеем

$$\lim_{x\to 0} y_2(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{d}{dx}\left\{ C_1 + C \displaystyle\int_x^{x_0} \frac{d\xi}{\xi \varphi(\xi) y_1'(\xi)} \right\}}{\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{y_1(x)} \right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{C / \quad p(x) y_1^2(x)}{y_1' / y_1^2(x)} = -C \lim_{x\to 0} \frac{1}{p(x) y'(x)}.$$

или

$$\lim_{x\to 0} \frac{C / \quad p(x) y_1^2(x)}{y_1' / y_1^2(x)} = -C \lim_{x\to 0} \frac{1}{p(x) y'(x)}$$

Согласно лемме 34.1, имеем

$$\lim_{x\to 0} p(x)y'(x) = 0,$$

следовательно, в итоге получаем

$$\lim_{x\to 0} y_2(x) = \infty,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Полученный результат показывает, что условие ограниченности решения задачи (34.1) выделяет единственное решение, т.к. другое линейно независимое решение не ограничено.

Таким образом, однородная краевая задача (34.1) при условии ограниченности решения имеет единственное решение $y(x) = 0$.

Рассмотрим теперь решение неоднородной краевой задачи

$$\begin{aligned} &L(y) = f(x), \quad x \in \; 0, l \;, \\ &\alpha\, y'(l) + \beta\, y(l) = 0, p(x) = x \cdot \varphi(x), \varphi(x) > 0. \end{aligned} \tag{34.6}$$

Как было показано в §31, решение задачи (34.6) выражается с помощью функции Грина в виде:

$$y(x) = \int_0^l f(\xi)G(x,\xi)d\xi \;,$$

где функция Грина $G(x,\xi)$, является ограниченным решением следующей задачи:

$$\begin{cases} L(G)=\dfrac{d}{dx}(p(x)\dfrac{dG}{dx})-q(x)G=0, x\in[0,\xi)\cup(\xi,l] \\ \alpha\dfrac{dG}{dx}+\beta G=0, \text{при } x=l \\ G(x=\xi+0,\xi)-G(x=\xi-0,\xi)=0 \\ \dfrac{dG(x=\xi+0,\xi)}{dx}-\dfrac{dG(x=\xi-0,\xi)}{dx}=\dfrac{1}{p(\xi)} \end{cases} \qquad (34.7)$$

Функцию Грина представляют в виде

$$G(x,\xi)=\begin{cases} C_1y_1(x)y_2(\xi), x[0,\xi), \\ C_1y_2(x)y_1(\xi), x(\xi,l], \end{cases} \qquad (34.8),$$

где функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями следующих задач Коши:

$$\begin{cases} L(y_1)=0\ ,\ x\in[0,l], \\ y_1(x=0)=\varphi(0),\ y'(x=0)=q(0) \end{cases} \qquad (34.9)$$

$$\begin{cases} L(y_2)=0\ ,\ x\in[0,l], \\ y_2(x=l)=\alpha,\ y_2'(x=l)=-\beta \end{cases} \qquad (34.10)$$

В задаче (34.10) начальные условия выбраны так, чтобы $y_2(x)$ удовлетворяла граничному условию при $x=l$ а в задаче (34.9) начальные условия выбраны так, чтобы выполнялось уравнение $L(y)=0$ при $x=0$:

$$(p(x)y''+p'(x)y'(x)-q(x)y(x))\big|_{x=0}=\varphi(0)y'(0)-q(0)y(0)=0$$

Постоянная в (34.8) находится из условия разрыва производной функции Грина при $x = \xi$.

$$C_1(y_2'(\xi)y_1(\xi) - y_1'(\xi)y_2(\xi)) = \frac{1}{p(\xi)}$$

Откуда $$C_1 = \frac{1}{\Delta(y_1, y_2)\, p(\xi)} \quad , \qquad (34.11)$$

где $\Delta(y_1, y_2)$ - определитель Вронского.

§ 35. Построение решения дифференциального уравнения в виде степенных рядов. Уравнение Бесселя.

Если коэффициенты дифференциального уравнения представляют собой степенные функции, то решение такого уравнения можно представить в виде степенного ряда. Рассмотрим этот метод применительно к уравнению Бесселя, которое можно получить из самосопряженного уравнения второго порядка, если положить $p(x) = x, q(x) = -x$:

$$\frac{d}{dx}(x\frac{dy}{dx}) + xy(x) = 0 \qquad (35.1)$$

или

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0 \qquad (35.2)$$

Представим решение в виде степенного ряда

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{35.3}$$

Подставив это представление в уравнение (35.1), получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k^2 x^{k-1} + x^{k+1}) a_k = 0$$

или

$$a_1 + \sum_{m=1}^{\infty} ((m+1)^2 a_{m+1} + a_{m-1}) x^m = 0$$

Откуда получаем

$$a_1 = 0; a_{m+1} = -\frac{a_{m-1}}{(m+1)^2}; m \in [1, \infty)$$

Это означает, что

$$a_{2k+1} = 0; a_{2k} = -\frac{a_{2(k-1)}}{4k^2}; k \in [1, \infty) \tag{35.4}$$

Из (35.4) следует, что

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} (k!)^2}; k \in [1, \infty) \tag{35.5}$$

Формула (35.5) легко доказывается методом математической индукции.

Подставив (35.5) в степенной ряд (35.3), получим ограниченное решение уравнения Бесселя:

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{a_0}{2^{2k}(k!)^2}x^{2k};0!=1.$$

Из условия $y(x=0)=1$ выбираем $a_0=1$. В этом случае $y(x)=J_0(x)$ - функция Бесселя нулевого порядка

$$J_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \qquad (35.7)$$

Полученный ряд сходится абсолютно и равномерно.

Задачи к VI главе.

1. Найти решение краевых задач

1.1. $\begin{cases} y''+y=0, x\in[0,\pi/2] \\ y'(0)=0, y'(\pi/2)=1 \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} y''-y'=0, x\in[0,1] \\ y(0)=0, y'(1)-y(1)=1 \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} y''-y=2x,\ x\in[0,1] \\ y(0)=0, y(1)=-1 \end{cases}$

2. Построить функцию Грина для краевых задач

2.1. $\begin{cases} y'' + y = f(x), x \in [0, \pi] \\ y'(0) = 0, y(\pi) = 0 \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} x^2 y'' + 2xy' = f(x),\ x \in [1, 2] \\ y(1) = 0, y'(2) = 0 \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} y'' - y = f(x),\ x \in (-\infty, \infty) \\ y(x) - \text{ограничено при } x \to \pm\infty \end{cases}$

3. При каких λ краевая неоднородная задача

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 1, x \in [0, 1] \\ y(0) = 0, y(1) = 0 \end{cases}$$

не имеет решения?

4. Найти решение неоднородной краевой задачи

4.1. $\begin{cases} y'' + y = \sin 2x, x \in [0, \pi] \\ y(0) = 0, y(\pi) = 0 \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} y'' - y = 2e^x,\ x \in [0, 1] \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$

Глава VII
Задачи на собственные значения дифференциальных уравнений.

§ 36. Задача Штурма – Лиувилля и ее свойства.

В предыдущих параграфах мы видели, что у краевой однородной задачи либо существует только тривиальное решение, либо отличное от нуля решение $\varphi_0(x)$. Пусть у однородной задачи

$$\begin{cases} L(y(x)) = \dfrac{d}{dx}(p(x)\dfrac{dy}{dx}) - q(x)y(x) = 0, x \in [0,l] \\ \gamma(y) = 0; \Gamma(y) = 0 \end{cases} \tag{36.1}$$

существует только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$. Поставим следующий вопрос: можно ли так изменить коэффициент $q(x)$, чтобы при новом коэффициенте существовало решение однородной задачи. Введем следующее изменение коэффициента $q_{нов} = q(x) - \lambda\rho(x)$, т.е. из $q(x)$ вычитается некоторая функция $\rho(x)$, умноженная на число λ. В результате получаем новую однородную краевую задачу:

$$\begin{cases} L(y) = -\lambda\rho(x)y(x), x \in [0,l] \\ \gamma(y) = 0; \Gamma(y) = 0; p(x) > 0; \rho(x) > 0 \end{cases} \tag{36.2}$$

Задача Штурма –Лиувилля заключается в определении множества λ_i, при которых существуют отличные от нуля решения задачи (36.2) $y_i(x)$. В дальнейшем будет показано, что существует бесконечное число λ_i (называемых собственные значения дифференциального оператора) и соответствующих собственных функций

$y_i(x)$ – решений однородной задачи (36.2). Таким образом, имеем следующую постановку задачи Штурма-Лиувилля:

Найти собственные значения λ_k, при которых однородная краевая задача (36.2) имеет нетривиальные решения, $y_k(x)$ - собственные функции. Предполагаем, что $\lambda = 0$ не является собственным значением.

Рассмотрим свойства этой задачи.

***Т е о р е м а* 36.1. Если λ_k – собственное значение задачи Штурма-Лиувилля, то ему соответствует единственная собственная функция $y_k(x)$.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Предположим, что существуют две собственные функции $y_k(x)$ и $z_k(x)$. Тогда они должны быть линейно независимы. Но при $x = 0$ выполняется граничное условие

$$\begin{cases} \alpha_1 y_k'(0) + \beta_1 y_k(0) = 0 \\ \alpha_1 z_k'(0) + \beta_1 z_k(0) = 0. \end{cases} \tag{36.3}$$

Т.к. существует отличное от нуля решение (α_1, β_1) линейной системы (36.3), то однородная алгебраическая система должна иметь определитель, равный нулю.
Следовательно, определитель Вронского
$\Delta(y_k, z_k) = 0$ при $x = 0$.
Тогда имеем, что определитель Вронского $\Delta(y_k, z_k) = 0$ при $\forall x \in (0, l)$. Следовательно, решения

$y_k(x)$, $z_k(x)$ - линейно зависимы, т.е. $z_k(x) = Cy_k(x)$. Следовательно, возможна только одна собственная функция для данного λ_k.

Т е о р е м а **36.2. Собственные функции $y_k(x)$ и $y_m(x)$ для разных собственных значений $\lambda_k \neq \lambda_m$ ортогональны с весом $\rho(x)$, т.е.**

$$\int_0^l \rho(x) y_k(x) y_m(x) dx = 0 \quad k \neq m. \qquad (36.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Т.к. $y_k(x)$ и $y_m(x)$ удовлетворяют одним и тем же краевым условиям, то из формулы Грина имеем

$$\int_0^l \left[y_k(x) L(y_m(x)) - y_m(x) L(y_k(x)) \right] dx = 0.$$

Подставим $L(y_s) = -\lambda_s \rho(x) y_s(x)$, получим

$$(\lambda_k - \lambda_m) \int_0^l \rho(x) y_k(x) y_m(x) dx = 0, \ \lambda_k - \lambda_m \neq 0,$$

что и требовалось доказать.

Т е о р е м а **36.3. Для граничных условий I или II рода $y(0) = 0$ (или $y'(0) = 0$); $y(l) = 0$ (или $y'(l) = 0$) и при $q(x) \geq 0$ все собственные значения задачи Штурма - Лиувилля положительны, $\lambda_n > 0$.**

Доказательство.
Умножим уравнение Штурма-Лиувилля при λ_n на $y_n(x)$ и проинтегрируем по x. Тогда

$$\int_0^l y_n(x)\left\{\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy_n}{dx}\right)-q(x)y_n(x)+\lambda_n\rho(x)y_n(x)\right\}dx=0 \ .$$

Откуда найдем:

$$\lambda_n=\frac{\int_0^l q(x)y_n^{\ 2}(x)dx-\int_0^l \frac{d}{dx}\left(p\frac{dy_n}{dx}\right)\cdot y_n(x)dx}{\int_0^l \rho(x)y_n^{\ 2}(x)dx} \ .$$

Проинтегрировав по частям и учитывая граничные условия, получим;

$$\int_0^l \frac{d}{dx}\left(p\frac{dy_n}{dx}\right)y_n(x)=-\ p(x)y_n'(x)y_n(x)\Big|_0^l-\int_0^l p(x)\left[\frac{dy_n}{dx}\right]^2 dx \ .$$

Учитывая граничные условия для $y(x)$ при $x=0$ и $x=l$, получим

$$\lambda_n = \frac{\int_0^l p(x)[y_n'(x)]^2 dx + \int_0^l q(x) y_n^2(x) dx}{\int_0^l \rho(x) y_n^2(x) dx}. \quad (36.5)$$

Т.к. $p(x) > 0,\ \rho(x) \ge 0,\ q(x) \ge 0$, то имеем $\lambda_k > 0$.
что и требовалось доказать.

Дополнение. Результат теоремы 36.3 $\lambda_k > 0$

переносится и на третье краевое условие

$\gamma(y) = \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0$,если

$\beta_1/\alpha_1 > 0,\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 \ne 0$ и на условие

$\Gamma(y) = \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0$,если

$\beta_2/\alpha_2 < 0,\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 \ne 0$.

§37. Редукция задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению.

Запишем задачу Штурма-Лиувилля в виде неоднородной задачи:

$$\begin{cases} L(y)=f,\ f=-\lambda\rho y \\ \gamma\,(y)=0 \\ \Gamma(y)=0. \end{cases} \tag{37.1}$$

Т.к. $\lambda=0$ не является собственным значением, то однородная задача (37.1) имеет только тривиальное решение.

Следовательно, согласно теореме 30.2, решение неоднородной задачи может быть представлено через функцию Грина $G(x,\xi)$ в виде:

$$y(x)=\int_0^l G(x,\xi)\,f(\xi)d\xi\ ,\ x\in[0,l]$$

Подставив $f(\xi)=-\lambda\rho(\xi)y(\xi)$, получим однородное интегральное уравнение второго рода:

$$y(x)+\lambda\int_0^l G(x,\xi)\rho(\xi)y(\xi)d\xi=0,x\in[0,l] \tag{37.2}$$

Для дальнейших исследований мы будем использовать результаты теории Шмидта для интегральных уравнений с симметричным ядром. Поэтому необходимо симметризовать уравнение (37.2). Введем новую функцию

$$y(x)=\frac{u(x)}{\sqrt{\rho(x)}},\quad \rho(x)>0.$$

Тогда интегральное уравнение (37.2) запишется в виде:

$$u(x)+\lambda\int_0^l K(x,\xi)u(\xi)d\xi=0 \tag{37.3}$$

$$K(x,\xi)=\sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}G(x,\xi).$$

Т.к. $G(x,\xi)=G(\xi,x)$, то ядро $K(x,\xi)=K(\xi,x)$, т.е. (37.3) - интегральное уравнение с симметричным ядром, и мы можем использовать теорию Шмидта.

Для интегрального уравнения (37.3) можно поставить задачу на собственные значения так же, как и для задачи Штурма-Лиувилля: найти собственные значения λ_i, при которых существует собственная функция $u_i(x)\neq 0$, являющаяся решением однородного интегрального уравнения (37.3). Докажем эквивалентность задачи на собственные значения для интегрального уравнения и задачи Штурма-Лиувилля.

Пусть существует собственное значение λ_i и собственная функция $u_i(x)\neq 0$ интегрального уравнения (35.3), т.е. выполняется тождество

$$u_i(x)=-\lambda_i\int_0^l K(x,\xi)u_i(\xi)d\xi,\ x\in[0,l].$$

Тогда выполняется тождество

$$y_i(x)=-\lambda_i\int_0^l G(x,\xi)y_i(\xi)\rho(\xi)d\xi,\ x\in[0,l] \qquad (37.4).$$

Необходимо доказать, что $y_i(x)$, представленное выражением (37.4), является решением задачи Штурма-Лиувилля. Для этого продифференцируем (37.4)

$$y_i'(x)=-\lambda_i\int_0^l \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\cdot y_i(\xi)\rho(\xi)d\xi. \qquad (37.5)$$

Если (35.4) и (35.5) подставить в краевые условия задачи Штурма – Лиувилля, то получим

$$\begin{cases} \gamma\ (y_i) = -\lambda_i \int\limits_0^l \gamma(G(x,\xi\ ))y_i(\xi\ )\rho(\xi)d\xi \\ \Gamma(y_i) = -\lambda_i \int\limits_0^l \Gamma(G(x,\xi\ ))y_i(\xi\ )\rho(\xi)d\xi 0 \end{cases} \tag{37.6}$$

Согласно определению функции Грина (30.5) $\gamma(G)=0$ и $\Gamma(G)=0$. Следовательно, из (37.6) получаем краевые условия для $y_i(x)$:

$$\gamma(y_i)=0; \Gamma(y_i)=0 \tag{37.7}$$

Теперь нужно доказать, что $y_i(x)$ удовлетворяет уравнению задачи Штурма-Лиувилля. Нам необходимо вычислить $(p(x)y_i'(x))'$. Т.к. функция Грина $G(x,\xi)$ имеет разрывную производную, то запишем:

$$(p(x)y_i'(x))' = -\lambda_i \frac{d}{dx}\left(p(x)\int\limits_0^x \frac{dG(x,\xi\ )}{dx} \cdot y_i(\xi\ )\rho(\xi)d\xi \right) -$$

$$-\lambda_i \frac{d}{dx}\left(p(x)\int\limits_x^l \frac{dG(x,\xi\ )}{dx} \cdot y_i(\xi\ )\rho(\xi)d\xi \right).$$

Продифференцировав, получим

$$(p(x)y_i'(x))' = -\lambda_i \int_0^x \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dG(x,\xi)}{dx}\right) y_i(\xi)\rho(\xi)d\xi -$$

$$-\lambda_i p(x)\frac{dG(x,x-0)}{dx} y_i(x)\rho(x) +$$

$$+\lambda_i p(x)\frac{dG(x,x+0)}{dx} y_i(x)\rho(x) -$$

$$-\lambda_i \int_x^l \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dG(x,\xi)}{dx}\right) y_i(\xi)\rho(\xi)d\xi.$$

Сложив полученное выражение с $-q(x)y_i(x)$, определенное (37.4), найдем:

$$L(y_i) = -\lambda_i \int_0^x L(G)y_i(\xi)\rho(\xi)d\xi - \lambda_i \int_x^l L(G)y_i(\xi)\rho(\xi)d\xi -$$

$$-\lambda_i p(x)\left(\frac{dG(x,x-0)}{dx} - \frac{dG(x,x+0)}{dx}\right) y_i(x)\rho(x).$$

Учитывая свойства функции Грина $G(x,\xi)$, определенной задачей (30.5):

$L(G)=0$ при $x \in [0,\xi)$ и $x \in (\xi, l]$

$$p(x)\left(\frac{dG(x,x-0)}{dx} - \frac{dG(x,x+0)}{dx}\right) = 1,$$

получим выражение

$L(y_i) = -\lambda_i \rho(x) y_i(x)$, совпадающее с уравнением Штурма – Лиувилля (36.2).

Таким образом, доказана эквивалентность задачи на собственные значения для дифференциального уравнения (36.2) и задачи для интегрального уравнения (37.3).

В дальнейшем мы будем опираться на несколько утверждений для интегральных уравнений с симметричным ядром, которые примем без доказательства.

1. Собственные значения для интегрального уравнения с симметричным ядром существуют.

2. Если число собственных значений интегрального уравнения (37.3) конечно, то ядро уравнения называется вырожденным и представимо в виде:

$$K(x,\xi) = -\sum_{m=1}^{n} \frac{u_m(x)u_m(\xi)}{\lambda_m} . \qquad (37.8)$$

В соответствии с этими утверждениями, мы можем утверждать, что задача Штурма – Лиувилля имеет собственные значения и собственные функции. Докажем теперь, что их бесконечное (счетное) множество.

***Т е о р е м а* 37.1. Ядро $K(x,\xi)$ интегрального уравнения (37.3) является невырожденным, а, следовательно, у него и у задачи Штурма-Лиувилля существует бесконечное (счетное) множество собственных значений λ_k и соответствующая им бесконечная последовательность $y_n(x)$ собственных ортонормированных функций.**

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Предположим, что ядро $K(x,\xi)$ вырожденное, т.е.

$$K(x,\xi) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\lambda_m} u_m(x)u_m(\xi),$$ и мы

имеем конечное число собственных значений. Тогда, согласно (35.3), имеем функцию Грина

$$G(x,\xi) = \frac{1}{\sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}} \sum_{m=1}^{n} \frac{u_m(x)u_m(\xi)}{\lambda_m} .$$

Учитывая, что $u_m(x)=\sqrt{\rho\ (x)}y_m(x),$ где $y_m(x)$ собственная функция задачи Штурма-Лиувилля, получим

$$G(x,\xi\ )=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\lambda_m}y_m(x)y_m(\xi)$$

Функции $y_m(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка, т.е. $y_m(x)\in C_2$. Конечная сумма таких функций тоже является дважды непрерывно дифференцируемой функцией, т.е.

$$G(x,\xi)\in C_2.$$

Однако, это невозможно, т.к. функция Грина имеет разрывную производную. Следовательно, $K(x,\xi\ )$ – невырожденное ядро, которое имеет бесконечное число собственных значений λ_k и собственных функций u_k . При этом собственные функции образуют ортонормированную систему

$$\int_0^l u_k(x)u_m(x)dx=\begin{cases}0\ ,\ если\ \ m\neq k\\ 1\ ,\ если\ \ m=k\end{cases}$$

Учитывая, что интегральное уравнение эквивалентно задаче Штурма – Лиувилля, можно утверждать, что задача Штурма – Лиувилля имеет бесконечное число собственных значений λ_k и собственных функций $\left\{y_k=\frac{u_k(x)}{\sqrt{\rho(x)}}\right\}$, которые ортогональны с весом $\rho(x)$:

$$\int_0^l y_k(x)y_m(x)\rho\ (x)dx=\begin{cases}0,если\ \ k\neq m\\ 1,если\ \ k=m\end{cases}\qquad(37.11)$$

что и требовалось доказать.

§38. Решение неоднородного интегрального уравнения с симметричным ядром. Теорема Стеклова.

Излагаемые в этом параграфе результаты опираются на теорему Гильберта-Шмидта о разложимости функции по собственным функциям интегрального уравнения с симметричным ядром. Прежде чем дать формулировку теоремы, рассмотрим следующее **определение.**

Функция $f(x)$ называется истокообразно представимой через ядро интегрального уравнения $K(x,\xi)$, если существует такая непрерывная функция $h(x)\in C, x\in[0,l]$, что

$$f(x)=\int_0^l K(x,\xi)h(\xi)d\xi. \qquad (38.1)$$

Т е о р е м а Гильберта –Шмидта. **Если функция $f(x)$ является истокообразно представимой через ядро $K(x,\xi)$, то она разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям интегрального уравнения**

$$u_m(x)+\lambda_m\int_0^l K(x,\xi)u_m(\xi)dx=0, \qquad (38.2)$$

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty} f_m u_m(x);\ f_m=\int_0^l f(x)u_m(x)dx. \qquad (38.3)$$

Опираясь на теорему Гильберта-Шмидта, получим решение неоднородного интегрального уравнения с симметричным ядром:

$$u(x)+\lambda\int_0^l K(x,\xi)u(\xi)dx = f(x), x\in[0,l], \quad (38.4)$$

Пусть правая часть уравнения является истокообразно представимой, т.е. она может быть разложена **в** абсолютно и равномерно сходящийся ряд (38.3).

Тогда, умножив (38.4) на u_m и проинтегрировав от 0 до l , получим

$$c_m + \lambda\int_0^l u_m(x)dx\int_0^l K(x,\xi)u(\xi)dx = f_m, \quad (38.5)$$

где

$$c_m = \int_0^l u(x)u_m(x)dx. \quad (38.6)$$

Заметим, что благодаря симметричности ядра , можно записать

$$\int_0^l K(x,\xi)u_m(x)dx = \int_0^l K(\xi,x)u_m(x)dx = -\frac{u_m(\xi)}{\lambda_m}.$$

Подставив это равенство в (38.5), получим

$$c_m - \frac{\lambda}{\lambda_m}\int_0^l u(\xi)u_m(\xi)d\xi = f_m$$

или

$$c_m(1-\frac{\lambda}{\lambda_m}) = f_m.$$

Откуда находим

$$c_m = f_m + \frac{\lambda}{\lambda_m - \lambda} f_m. \quad (38.7)$$

Зная c_m, мы можем найти решение неоднородного интегрального уравнения в виде:

$$u(x)=\sum_{m=1}^{\infty}c_m u_m(x)=f(x)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda}{\lambda_m-\lambda}f_m u_m(x). \qquad (38.8)$$

Ряд в (38.8) сходится абсолютно и равномерно,
что и требовалось доказать.

По собственным функциям можно разлагать в ряд функции, заданные на отрезке $x\in[0,l]$. Возможность такого разложения определяет теорема Стеклова.

Теорема Стеклова. **Если дважды непрерывно дифференцируемая на $[0,l]$ функция $z(x)$ удовлетворяет однородным граничным условиям $\gamma(z)=0$ и $\Gamma(z)=0$, то она разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся на $[0,l]$ ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувиля.**

Доказательство.

Так как $z(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, то $L(z)=f$, где f – непрерывная функция.

Легко показать, что $\sqrt{\rho(x)}z(x)$ – истокообразно представима по ядру интегрального уравнения $K(x,\xi)$.

Т.к. $z(x)$ удовлетворяет неоднородному уравнению и соответствующим краевым условиям, то она представима через функцию Грина краевой задачи $G\ \ x,\xi$ в виде:

$$z(x)=\int_0^l G(x,\xi)f(\xi)d\xi. \tag{38.9}$$

Учитывая, что $K(x,\xi)=G(x,\xi)\sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}$ из (38.9) получим

$$\sqrt{\rho(x)}z(x)=\int_0^l K(x,\xi)h(\xi)d\xi,$$

где $h(\xi)=f(\xi)\Big/\sqrt{\rho(\xi)}$ – непрерывная функция.

Следовательно, $\sqrt{\rho(x)}z(x)$ – истокообразно представимая функция, и, согласно теореме Гильберта-Шмидта, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям интегрального уравнения (38.2):

$$\begin{aligned}&\sqrt{\rho(x)}z(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n u_n(x)\\ &C_n=\int_0^l \sqrt{\rho(x)}z(x)u_n(x)dx\end{aligned}, \tag{38.10}$$

Собственная функция интегрального уравнения $u_n(x)$ связана с собственной функцией задачи Штурма – Лиувилля $y_n(x)$ соотношением $u_n(x)=\sqrt{\rho(x)}y_n(x)$.

Подставив это соотношение в (38.10), получим, окончательно, разложение функции $z(x)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля:

$$\begin{cases} z(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n y_n(x), \\ C_n = \int\limits_0^l z(x) y_n(x) \rho\,(x) dx, \end{cases} \tag{38.11}$$

причем $\int\limits_0^l \rho\,(x) y_n{}^2(x) dx = 1,$

что и требовалось доказать.

§39. Задачи на собственные значения для уравнения с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим простейшую задачу для уравнения с постоянными коэффициентами, когда $p(x)=1,\ q(x)=0,$ а граничные условия первого рода. Тогда задача Штурма-Лиувилля (36.2) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 y(x)}{dx^2} = -\lambda y(x), x \in [0,l] \\ y(0)=0; y(l)=0 \end{cases} \tag{39.1}$$

Общее решение уравнения (39.1) равно:

$$y(x) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}x \tag{39.2}$$

Подставив в граничные условия задачи, получим:

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 \sin\sqrt{\lambda} l = 0;\ C_1 \neq 0 \end{cases},$$

Откуда получаем $\sqrt{\lambda} l = n\pi$, где любое натуральное число $n \in [1,2,3,...\infty)$. В результате находим собственные числа задачи $\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2$ и, соответственно, собственные функции

$$y_n(x) = C_1 \sin\frac{n\pi x}{l} \quad . \qquad (39.3)$$

Постоянную C_1 легко определить из условия $\int_0^l y_n{}^2(x)dx = 1$. Откуда находим $C_1 = \sqrt{\frac{2}{l}}$, и собственная функция равна

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l} \quad . \qquad (39.4)$$

В случае краевых условий второго рода имеем задачу Штурма-Лиувилля в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y(x)}{dx^2} = -\lambda y(x), x \in [0,l] \\ y'(0) = 0; y'(l) = 0 \end{cases} \qquad (39.5)$$

Подставив общее решение (39.2) в граничные условия, получим

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin\sqrt{\lambda} l = 0;\ C_2 \neq 0 \end{cases},$$

откуда находим $\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2$ и собственную функцию

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{n\pi x}{l} \quad . \qquad (39.6)$$

Если одно граничное условие первого рода, а другое второго рода, т.е.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y(x)}{dx^2} = -\lambda y(x), x \in [0,l] \\ y(0) = 0; y'(l) = 0 \end{cases} \tag{39.7}$$

то собственные значения получаются другими. Подставив общее решение (39.2) в граничные условия, найдем

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 \cos\sqrt{\lambda} l = 0;\ C_1 \neq 0 \end{cases}$$

Откуда находим $\lambda_n = (\dfrac{(2n+1)\pi}{2l})^2$, а собственные функции имеют вид

$$y_n(x) = C_1 \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} \ . \tag{39.8}$$

Из нормировки находим $C_1 = \sqrt{\dfrac{2}{l}}$.

Наиболее сложно определяются собственные значения в случае условия третьего рода. Например, рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y(x)}{dx^2} = -\lambda y(x), x \in [0,l] \\ y(0) = 0; y'(l) = \alpha y(l) \end{cases} \tag{39.9}$$

Подставив общее решение (39.2) в граничные условия, найдем:

$$\begin{cases} C_2 = 0; C_1 \neq 0 \\ \sqrt{\lambda} \cos\sqrt{\lambda} l = \alpha \sin\sqrt{\lambda} l \end{cases}.$$

Откуда для определения $\sqrt{\lambda}$ получаем уравнение

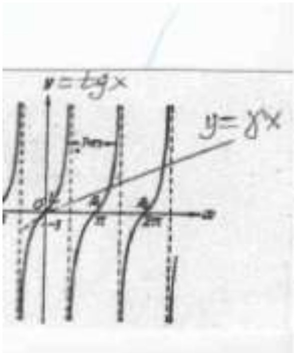
$$tg\sqrt{\lambda} l = \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} \ . \tag{39.10}$$

Если обозначить $\sqrt{\lambda}l = x$ и $\gamma = 1/_{\alpha l}$, то получим уравнение

$$tg\,x = \gamma x. \tag{39.11}$$

Определив корни этого уравнения x_n $, n \in [1, \infty),$ найдем собственные значения $\lambda_n = x_n^2/_{l^2}$ и собственные функции

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{x_n x}{l} \quad . \tag{39.12}$$



Рисунок

Корни x_n находятся как значения x, при которых пересекаются функции $y = tg\,x$ и $y = \gamma x$. На рис показано получение этих корней. При $n >> 1,\ x_n \to \dfrac{(2n+1)\pi}{2}$,чем больше γ, тем быстрее x_n выходят на асимптотические значения.

§40. Собственные функции краевой задачи для уравнения Бесселя.

В §35 было рассмотрено уравнения Бесселя

$$\frac{d}{dx}(x\frac{d}{dx}) + xy(x) = 0,$$

Ограниченным решением которого является функция Бесселя нулевого порядка

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} .$$

Задача Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя нулевого порядка ставится следующим образом: найти собственные значения λ_n для краевой задачи

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(x\frac{dy}{dx}) = -\lambda x y(x), x \in [0,l] \\ y(x=l) = 0 \end{cases} , \qquad (40.1)$$

при которых существуют ограниченные решения краевой задачи (40.1). Если сделать замену переменного $t = \sqrt{\lambda} x$, то задача (40.1) примет вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(t\frac{dZ}{dt}) + tZ(t) = 0, t \in [0, \sqrt{\lambda} l] \\ Z(\sqrt{\lambda} l) = 0;\ Z(t) = y(x = t/\sqrt{\lambda}) \end{cases} \qquad (40.2)$$

Уравнение Бесселя (40.2) имеет ограниченное решение $Z(t) = J_0(t)$. Следовательно, решение задачи (40.1) равно:

$$y_n(x) = J_0(\sqrt{\lambda_n}\, x) , \qquad (40.3)$$

где λ_n находятся из граничного условия

$$J_0(\sqrt{\lambda_n} l) = 0 . \qquad (40.4)$$

Если обозначить нули функции Бесселя μ_n, где

$$J_0(\mu_n) = 0,\ \ n \in [1, \infty) , \qquad (40.5)$$

то мы находим собственные функции задачи (40.1) в виде:

$$y_n(x) = J_0(\frac{\mu_n x}{l}).$$

Для функции Бесселя известна асимптотика при больших значениях аргумента:

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \frac{\pi}{4}) + O(1/x^{3/2}). \qquad (40.6)$$

Следовательно, при больших x корни Беeселевой функции будут близки к корням уравнения

$$\cos(\tilde{\mu}_n - \frac{\pi}{4}) = 0; \quad \tilde{\mu}_n = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi ,$$

или

$$\tilde{\mu}_n = n\pi - \frac{\pi}{4}, \quad n \in [1, \infty). \qquad (40.7)$$

В таблице 40.1 приведены значения точных корней μ_n и приближенных $\tilde{\mu}_n$.

Таблица 40.1

n	1	2	3	4	5
μ_n	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309
$\tilde{\mu}_n$	2,3562	5,4978	8,6394	11,781	14,9226

Легко видеть, что уже при $n = 2$ приближенное значение $\tilde{\mu}_2$ отличается от точного всего на 0,4 %, а при $n = 4$ они отличаются всего на 0, 09 %. Поэтому, начиная с $n = 4$, можно при расчетах пользоваться асимптотической формулой (40.7) для определения μ_n.

Задачи к VII главе.

1. Найти собственные числа и собственные функции следующих краевых задач

1.1. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, x \in [0, \pi] \\ y(0) = 0, y(\pi) = 0 \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, x \in [0, \pi] \\ y'(0) = 0, y(\pi) = 0 \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, x \in [0, \pi] \\ y'(0) = 0, y'(\pi) = 0 \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, x \in [0, \pi] \\ y(0) = 0, y'(\pi) = y(\pi) \end{cases}$

ГЛАВА VIII

Вариационное исчисление.

§41.Понятие функционала и вариации. Постановка вариационной задачи. Необходимое условие экстремума.

Определение 41.1 ***Функционалом*** называется отображение множества функций $y \in Y$ в множество чисел.

Обычно описание некоторого процесса мы получаем в виде функции, зависящей от времени или пространственных координат. Однако на практике очень часто необходимо знать интегральные характеристики процесса. Например, не только траекторию движения объекта, но и время необходимое на переход по траектории из точки А в точку В, т.е. функции, описывающей траекторию, ставится в соответствие скалярная величина (время в пути). Если $y = y(x)$ - траектория, а $v(x, y)$ - скорость движения в зависимости от координат положения объекта, то время T, затраченное на прохождение траектории из точки $(x_0, y_0 = y(x_0))$ в точку $(x_1, y_1 = y(x_1))$, определяется функционалом

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{v(x, y)} dx; \qquad y_0 = y(x_0)\,,\; y_1 = y(x_1) \qquad (41.1)$$

Вариационное исчисление изучает методы определения максимальных (или минимальных) значений функционала.

Вариационными задачами называют задачи, в которых необходимо исследовать функционал на экстремальные значения. Вариационная задача может быть поставлена на закрепленных концах функции или на подвижных границах, когда значения функции на концах отрезка неизвестны. В нашем курсе будут рассматриваться только задачи с закрепленными концами.

Определение 41.2. ***Вариацией*, или *приращением* функции** $y(x)$ (аргумента функционала) называется разность функций $\delta y = y(x) - y_1(x)$, где $y_1(x)$ - фиксированная функция, а $y(x)$- произвольная функция из множества *Y*, на котором определен функционал. Т.к мы рассматриваем вариационные задачи с закрепленными концами, то должно выполнятся условие $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$.

Определение 41.3 Функционал $\Phi[y(x)]$ называется ***непрерывным,*** если малым изменениям аргумента $y(x)$ соответствует малое изменение функционала.

Естественно, возникает вопрос о том, в каком смысле понимать малость вариации функции $\delta y = y(x) - y_1(x)$.

Определение 41.4. Функции $y(x)$ и $y_1(x)$ считаются **близкими в смысле к-ого порядка**, если $y(x) \in C_k$ и

$$\delta_k = \|\delta y\|_{C_k} =$$

$$= \max_{x \in [x_0, x_1]} \left| y(x) - y_1(x), ..., y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x) \right| \ll 1 \qquad (41.3)$$

Определение 41.5 Функционал $\Phi[y(x)]$ называется ***непрерывным при*** $y = y_1(x)$ ***в смысле близости к-ого порядка,*** если для любого положительного $\varepsilon > 0$ можно найти такое δ, что

$$\left|\Phi(y) - \Phi(y_1)\right| < \varepsilon \text{, если } \delta_k < \delta$$

Определение 41.6. ***Линейным функционалом*** называется функционал, удовлетворяющий условиям

$$\begin{gathered} L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(y_1) + \beta L(y_2), \\ \alpha, \beta = const. \end{gathered} \tag{41.5}$$

Например, линейным является функционал

$$L(y) = \int_{x_0}^{x_1} (p(x)y + q(x)y')dx,$$

так как

$$L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \int_{x_0}^{x_1} (p(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) + q(x)(\alpha y_1' + \beta y_2'))dx =$$

$$= \alpha \int_{x_0}^{x_1} (p(x)(y_1(x)) + q(x)(y_1'(x))dx +$$

$$+ \beta \int_{x_0}^{x_1} (p(x)(y_2(x)) + q(x)(y_2'(x))dx = \alpha L(y_1) + \beta L(y_2).$$

Определение 41.7 ***Вариацией функционала*** называется главная, линейная по отношению к δy часть приращения функционала.

Если приращение функционала

$$\Delta\Phi = \Phi\;\; y+\delta y\;\; -\Phi\Big[\,y\;\; x\;\;\Big]$$

можно представить в виде

$$\Delta\Phi = L\;\; y(x),\delta y\;\; +\theta\Big[\,y\;\; x\;\;,\delta y\Big]\cdot \max\left|\delta y\right| \tag{41.6}$$

где $\theta\Big[\,y\;\; x\;\;,\delta y\Big]\to 0$ при $\max\left|\delta y(x)\right|\to 0$, а $L\;\; y(x),\delta y$ -линейный по отношению к δy функционал, то вариация

$$\delta\Phi\;\; y(x)\;\; = L\;\; y(x),\delta y \tag{41.7}$$

Используя (41.6) и (41.7) , можно получить легкий способ определения вариации функционала. Для этого введем параметр α в значении вариации функции $\delta y\to\alpha\delta y$. Тогда, согласно (41.6) и (41.7), имеем:

$$\begin{gathered}\Delta\Phi = \Phi\;\; y+\alpha\delta y\;\; -\Phi\Big[\,y\;\; x\;\;\Big] = \varphi(\alpha) = \\ L\;\; y(x),\alpha\delta y\;\; +\theta\Big[\,y\;\; x\;\;,\alpha\delta y\Big]\cdot \max\alpha\left|\delta y\right|\end{gathered} \tag{41.8}$$

Учитывая, что $L\;\; y(x),\alpha\delta y$ - линейный по отношению к δy функционал, то

$L\;\; y(x),\alpha\delta y\;\; = \alpha L\;\; y(x),\delta y$

Следовательно,

$$\Delta\Phi = \alpha L\ \ y(x),\delta y\ \ + \alpha\theta\left[\,y\ \ x\ \ ,\alpha\delta y\,\right]\bullet \max\left|\delta y\right|$$

Откуда получаем

$$\left.\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = L\ \ y,\delta y\ \ = \delta\Phi[y]$$

или, учитывая (41.8), имеем вариацию функционала

$$\delta\Phi[y] = \left.\frac{\partial}{\partial\alpha}\Phi[y(x)+\alpha\delta y]\right|_{\alpha=0} \qquad (41.9)$$

Именно по формуле (41.9) в дальнейшем будем вычислять вариацию функционала. Естественно, при этом должна существовать производная $\left.\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\Phi[y(x)+\alpha\delta y]\right|_{\alpha=0}$. Если производная не существует, значит, не существует и вариации функционала.

Необходимое условие экстремума функционала.

Определение 41.8 Функционал $\Phi(y)$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ max (или min), если значение функционала $\Phi(y)$ на любой близкой к $y = y_0(x)$ кривой не больше (не меньше) , чем $\Phi(y_0)$, т.е.

$$\left.\Delta\Phi\right|_{y_0} \le 0 \text{ или } (\left.\Delta\Phi\right|_{y_0} \ge 0).$$

***Т е о р е м а* 41.1 Если функционал $\Phi(y)$, имеющий вариацию, достигает максимума (или минимума) при $y = y_0(x)$, где $y_0(x)$ - внутренняя точка области определения функционала, то при $y_0(x)$**

$$\delta\Phi\Big|_{y=y_0} = 0 \qquad (41.10)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При фиксированных $y_0(x)$ и δy функционал

$$\Phi(y_0(x) + \alpha\delta y) = \varphi(\alpha).$$

По предположению $\varphi(\alpha)$ достигает max (или min) при $\alpha = 0$. Следовательно, должно выполняться необходимое условие $\varphi'(0) = 0$. Тогда, согласно определению вариации функционала (41.10) , имеем

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\Phi[y_0(x) + \alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0} = \delta\Phi = 0.$$

Если экстремум достигается для *y(x)*, близких к y_0 нулевого порядка, то ***экстремум сильный***, если для близких к y_0 первого (или выше) порядка, то ***экстремум слабый.***

§42. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнения Эйлера.

Исследуем вариационную задачу для простого функционала вида

$$\begin{cases} \Phi[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx, \\ y(x_0) = y_0, \ \ y(x_1) = y_1 \end{cases} \qquad (42.1)$$

Пусть $y(x)$ - экстремаль (т.е. на $y(x)$ достигается экстремум $\Phi[y]$). Тогда зададим параметрическое семейство функций

$$y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\delta y, \ \delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0. \qquad (42.2)$$

Вычислим вариацию функционала. Согласно (41.9)

$$\delta\Phi[y(x)] = \left.\frac{\partial}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y+\alpha\delta y, y'+\alpha\delta y')dx =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} \left\{ F_y \frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial\alpha} + F_{y'} \left.\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} \right\} dx,$$

где $F_y = \dfrac{\partial F}{\partial y}$, $F_{y'} = \dfrac{\partial F}{\partial y'}$.

Подставив $y(x,\alpha)$ из (42.2), получим

$$\delta\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y')dx =$$

$$= F_y \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y - \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} \right] \delta y(x)dx,$$

Учитывая, что $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$, имеем окончательно

$$\delta\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y - \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} \right] \bullet \delta y(x)dx \,. \qquad (42.3)$$

Таким образом, исследование вариационной задачи сводится к исследованию интеграла (42.3), где $\delta(y)$ - любые непрерывные функции, обращающиеся в ноль на концах интервала. Для этого исследования принципиальное значение имеет основная лемма вариационного исчисления.

***Лемма* 42.1 Основная лемма**.

Если для каждой непрерывной на $[x_0, x_1]$ функции $\eta(x)[\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0]$ выполняется условие

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\eta(x)dx = 0,$$

где $\Phi(x)$-непрерывная на $[x_0, x_1]$ функция, то $\Phi(x) = 0$ при $x \in [x_0, x_1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существует $\overline{x} \in [x_0, x_1]$ такое, что $\Phi(\overline{x}) \neq 0$. Тогда из непрерывности $\Phi(x)$

следует, что существует окрестность $[x_0, x_1]$ точки $\bar{x}$, где $\Phi(x)$ сохраняет знак. Так как $\eta(x)$ - любая непрерывная функция, то взяв

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [x_2, x_3] \\ \geq 0, & x \in [x_2, x_3] \end{cases}$$

получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\eta(x)dx = \int_{x_2}^{x_3} \Phi(x)\eta(x)dx \neq 0$$

Пришли к противоречию. Следовательно, $\Phi(x) \equiv 0$,
что и требовалось доказать

Используя основную лемму, можно получит уравнение, которому должна удовлетворять функция, являющаяся экстремалью функционала.

Т е о р е м а **42.1 Необходимым условием экстремума функционала**

$$\Phi(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

при $y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1$ **является выполнение на экстремали уравнения Эйлера**

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0 \qquad (42.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Согласно теореме 41.1, необходимым условием экстремума функционала является условие $\delta\Phi = 0$. Подставив в это условие выражение (42.3) для вариации функционала, получим

$$\delta\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y - \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} \right] \cdot \delta y(x) dx = 0, \ \delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0 .$$

Согласно основной лемме вариационного исчисления, из полученного выражения следует

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0 ,$$

что и требовалось доказать.

Уравнения Эйлера (42.4) можно записать в виде

$$\begin{cases} F_y - F_{xy'} - y'F_{yy'} - y''F_{y'y'} = 0, \ x \in [x_0, x_1] \\ y(x_0) = y_0, \ y(x_1) = y_1. \end{cases} \qquad (42.5)$$

Таким образом, если существуют соответствующие производные функции $F(x, y, y')$,экстремаль функционала является решением краевой задачи для уравнения второго порядка (42.5).

Рассмотрим, например, задачу определения экстремума для функционала

$$\begin{cases} \Phi[y(x)] = \int\limits_0^{\pi/2} \left[(y'^2) - y^2 \right] dx, \\ y(0) = 0, \ y(\frac{\pi}{2}) = 1. \end{cases} \qquad (42.6)$$

Имеем $F_y = -2y; F_{xy'} = 0; F_{yy'} = 0; F_{y'y'} = 2.$ Следовательно, уравнение Эйлера имеет вид

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0, \ x[0, \frac{\pi}{2}], \\ y(0) = 0, \ y(\frac{\pi}{2}) = 1. \end{cases}$$

Решение этой краевой задачи дает $y(x) = \sin x$. Следовательно, экстремум функционала (42.6) достигается на функции $y(x) = \sin x$ и равен

$$\Phi(\sin x) = \int\limits_0^{\pi/2} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos 2x dx = 0.$$

§43.Функционалы, содержащие производные порядка выше первого. Необходимые условия экстремума.

Выше исследовалась задача для функционала, зависящего только от $y(x)$ и $y'(x)$. Рассмотрим теперь функционал, зависящий от производных порядка выше первого:

$$\Phi(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',...,y^{(n)})dx \qquad (43.1)$$

Возникает вопрос, какие условия закрепления функции $y(x)$ на концах интервала $[x_0,x_1]$ должны выполняться в этом случае. В вариационной задаче, в которой функционал зависит от старших производных порядка n, закрепляются не только функции, но и значения старших производных до порядка $(n\text{-}1)$ включительно:

$$\begin{aligned} &y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0',..., y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},\\ &y(x_1)=y_1, y'(x_1)=y_1',..., y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)}. \end{aligned} \qquad (43.2)$$

Т е о р е м а **43.1 Необходимым условием экстремума функционала (43.1) при граничных условиях (43.2) является выполнение на экстремали $y(x)$ уравнения Эйлера-Пуассона**

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}(F_{y^k})=0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Вычислим вариацию функционала (43.1). Согласно (41.9), имеем

$$\delta\Phi = \frac{\partial}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} \Phi(y+\alpha\delta y) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y+\alpha\delta y, ..., y^{(n)} + \alpha\delta y^{(n)})dx = \qquad (43.3)$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \{F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + ... + F_{y^{(n)}} \delta y^{(n)}\} dx$$

Причем при x_0 и x_1 имеем граничные условия

$$\delta y = 0, \delta y' = 0, ..., \delta y^{(n-1)} = 0 \ .$$

Интегрируя второе слагаемое в (43.3) по частям, получим

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \bullet \delta y'(x) = [F_{y'} \bullet \delta y'(x)]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}(F_{y'}) \bullet \delta y(x) dx.$$

Учитывая граничные условия, найдем

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \bullet \delta y' dx = -\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}(F_{y'}) \bullet \delta y(x) dx. \qquad (43.4)$$

Аналогично, интегрируя третье слагаемое два раза по частям, получим

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \bullet \delta y''(x) dx =$$

$$= [F_{y''} \bullet \delta y']_{x_0}^{x_1} - \left[\frac{d}{dx}(F_{y''}) \delta y \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2}(F_{y''}) \bullet \delta y(x) dx.$$

или, учитывая граничные условия, имеем

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \bullet \delta y'' dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2}(F_{y''}) \bullet \delta y(x) dx. \qquad (43.5)$$

В общем случае получаем

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y^{(n)}} \bullet \delta y^{(n)} dx = (-1)^n \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^n}{dx^n}(F_{y(n)}) \bullet \delta y(x) dx. \qquad (43.6)$$

Подставив (43.4-43.6) в (43.3), определим вариацию функционала в виде

$$\delta\Phi = \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) + \frac{d^2}{dx^2}(F_{y''}) + \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(F_{y(n)})) \bullet \delta y(x) dx. \qquad (43.7)$$

Необходимым условием экстремума функционала является равенство нулю его вариации. Тогда, согласно (43.7), имеем

$$\int_{x_0}^{x_1} [\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}(F_{y^k})] \delta y(x) dx = 0. \qquad (43.8)$$

К полученному выражению (43.8) можно применить основную лемму вариационного исчисления, т.к. $\delta y(x)$ - произвольная непрерывная функция. Следовательно, получаем уравнения Эйлера-Пуассона

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{d^k}{dx^k}(F_{y^k})=0, \tag{43.9}$$

что и требовалось доказать.

Экстремаль $y(x)$ должна иметь $2n$ непрерывных производных и являться решением краевой задачи для уравнения Эйлера-Пуассона (43.8) с краевыми условиями (43.2).

Рассмотрим для примера исследование на экстремум функционала

$$\Phi = \int_0^1 (y^2(x) + 2(y'(x)^2 + y''(x)^2)dx \tag{43.10}$$

при граничных условиях :

$$y(0)=0;\ y'(0)=-2;\ y(1)=0;\ y'(1)=e-e^{-1}\ . \tag{43.11}$$

Следовательно, имеем

$$F(x,y,y',y'') = y^2 + 2y' + (y'')^2$$

Откуда получаем

$$F_y = 2y;\ F_{y'} = 4y';\ F_{y''} = 2y''.$$

Подставив полученные выражения в уравнение Эйлера-Пуассона (43.9), найдем уравнение для экстремали:

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) + \frac{d^2}{dx^2}(F_{y''}) = 0$$

или

$$y^{(IV)}(x) - 2y''(x) + y(x) = 0.$$

Фундаментальная система решений для этого уравнения находится с помощью корней характеристического уравнения:

$$M(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Откуда получаем ФСР в виде:

$$y_1(x) = e^x;\ \ y_2 = xe^x;\ y_3 = e^{-x};\ \ y_4 = xe^{-x}.$$

Следовательно, общее решение уравнения Эйлера-Пуассона равно

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^x + (c_3 + c_4 x)e^{-x}\ . \qquad (43.12)$$

Подставив (43.12) в краевые условия (43.11), получим алгебраическую систему для определения (c_1, c_2, c_3, c_4):

$$y(0) = c_1 + c_3 = 0;\ \ y(1) = (c_1 + c_2)e + (c_3 + c_4)e^{-1} = 0$$

$$y'(0) = c_1 + c_2 - c_3 + c_4 = -2;\ y'(1) = (c_1 + 2c_2)e - c_3 e^{-1} = e - e^{-1}$$

Решение системы дает:

$c_1 = -1; c_2 = 1;\ c_3 = 1;\ c_4 = -1.$

Тогда, согласно (43.12), получаем экстремаль:

$$y(x) = (x - 1)(e^x - e^{-x}) \qquad (43.13)$$

§44. Функционалы от нескольких функций. Необходимые условия экстремума.

Рассмотрим функционал, зависящий от нескольких функций $(y_1, y_2, ..., y_n) = \overline{y}$:

$$\Phi[\overline{y}(x)] = \int_{x_0}^{x} F(x, \overline{y}, \overline{y}')dx. \qquad (44.1)$$

Будем рассматривать задачу с закрепленными концами, т.е.

$$\overline{y}(x_0) = \overline{y}_0, \ \overline{y}(x_1) = \overline{y}_1. \qquad (44.2)$$

Таким образом, мы получили вариационную задачу (44.1-44.2) для вектор- функции $\overline{y}(x)$.

Определение 44.1 ***Вариацией вектор–функции*** в окрестности $\overline{y}^0(x)$ называется разность

$\delta\overline{y}(x) = \overline{y}(x) - \overline{y}^0(x) = (\delta y_1, \delta y_2, ..., \delta y_n)$, где

$\delta y_i(x) = y_i(x) - y_i^0(x)$, причем все $\delta y_i(x)$ независимы.

Определение 44.2 ***Вариация функционала, зависящего от вектор–функции, вычисляется*** аналогично (41.9), по формуле

$$\delta\Phi[\overline{y}(x)] = \frac{\partial}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} \Phi[\overline{y}(x) + \alpha\delta\overline{y}) \ . \qquad (44.3)$$

Необходимым условием экстремума функционала, зависящего от вектор–функции, так же как и в случае скалярной функции, является равенство нулю вариации функционала, т.е.

$$\delta\Phi[\overline{y}(x)] = 0. \qquad (44.4)$$

Легко получить уравнения Эйлера для функционала (44.1). Для этого, согласно (44.3), вычислим вариацию функционала (44.1):

$$\delta\Phi[\bar{y}] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} F(x, \bar{y} + \alpha\delta\bar{y}, \bar{y}' + \alpha\delta\bar{y}')dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x, \bar{y}, \bar{y}')}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F(x, \bar{y}, \bar{y}')}{\partial y_i'} \delta y_i' \right) dx \quad .$$

Проинтегрировав второе слагаемое по частям и, учитывая, что $\delta\bar{y}(x_0) = 0;\ \delta\bar{y}(x_1) = 0$, получим в итоге вариацию функционала в виде

$$\delta\Phi[\bar{y}] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F(x, \bar{y}, \bar{y}')}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F(x, \bar{y}, \bar{y}')}{\partial y_i'} \right) \right] \delta y_i(x) dx \qquad (44.5)$$

Подставив (44.5) в (44.4), получим необходимое условие экстремума функционала (44.1):

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F(x, \bar{y}, \bar{y}')}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F(x, \bar{y}, \bar{y}')}{\partial y_i'} \right) \right] \delta y_i(x) dx = 0. \quad (44.6)$$

Так как вариации $\delta y_i(x),\ i \in [1, n]$ - любые непрерывные независимые друг от друга функции, то мы имеем право выбрать их в виде

$$\delta y_i(x) = \begin{cases} 0, i \neq m,\ i \in [1, n] \\ \delta y_m(x),\ i = m \end{cases} .$$

Тогда условие (44.6) запишется в виде

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F(x,\bar{y},\bar{y}')}{\partial y_m}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x,\bar{y},\bar{y}')}{\partial y_m'}\right)\right]\delta y_m(x)dx=0, m\in[1,n]$$

Применяя к полученному равенству основную лемму вариационного исчисления, получим систему уравнений Эйлера

$$\frac{\partial F(x,\bar{y},\bar{y}')}{\partial y_m}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F(x,\bar{y},\bar{y}')}{\partial' y_m})=0,\ m\in[1,n], \qquad (44.7)$$

которая, вместе с граничными условиями (44.2), дает нам краевую задачу для вектор-функции $\bar{y}(x)$- экстремали функционала (44.1).

Рассмотрим для примера задачу

$$\begin{cases}\Phi(\bar{y})=\int\limits_0^{\pi/2}(y_1^2(x)-y_1'^2(x)-y_2'^2)dx,\\ y_1(0)=0,\ y_2(0)=0,\ y_1(\frac{\pi}{2})=1,\ y_2(\frac{\pi}{2})=1.\end{cases} \qquad (44.8)$$

Получаем для экстремали краевую задачу:

$$y_1''+y_1=0,\ x\in[0,\frac{\pi}{2}],\ y_1(0)=0,\ y_1(\frac{\pi}{2})=1,$$

$$y_2''(0)=0,\ x\in[0,\frac{\pi}{2}],\ y_2(0)=0,\ y_2(\frac{\pi}{2})=1.$$

Откуда находим экстремаль $\bar{y}(x)=(y_1(x),y_2(x))$, где

$$y_1=\sin x,\ y_2=\frac{2}{\pi}x. \qquad (44.9)$$

В результате получаем минимум функционала

$$\min \Phi[y_1, y_2] = \Phi\,[\sin x, \frac{2}{\pi}x] = -\frac{2}{\pi}\;. \qquad (44.10)$$

Естественно, полученный результат может быть обобщен на случай функционала от вектор-функции, зависящего от производных высокого порядка (больше первого):

$$\Phi[\bar{y}(x)] = \int_{x_0}^{x} F(x, \bar{y}, ..., \bar{y}^{(k)})dx\,, \quad \bar{y} = (y_1, ..., y_n). \qquad (44.11)$$

В этом случае экстремаль $\bar{y}(x)$ является решением системы уравнений Эйлера-Пуассона:

$$\frac{\partial F}{\partial y_m} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_m}\right) + ... + (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\partial F}{\partial y_m^{(k)}}\right) = 0, m \in [1, n] \qquad (44.12)$$

§45. Вариационные задачи на условный экстремум. Метод неопределенных множителей Лагранжа.

Определение 45.1. ***Вариационной задачей на условный экстремум*** называется задача, в которой требуется определить экстремум функционала $\Phi[\bar{y}]$, причем на функции $\bar{y} = (y_1, ..., y_n)$ наложены дополнительные условия связи.

Определение 45.2. ***Связи***, накладываемые на функции $\bar{y} = (y_1, ..., y_n)$, от которых зависит функционал $\Phi[\bar{y}]$, называются ***голономными,*** если они накладывают ограничения только на x и $\bar{y}(x)$:

$\varphi_i(x,\bar{y}(x))=0,\ i\in[1,m],\ m<n$,

и ***неголономными*** , если накладываются условия также на производную $\bar{y}'(x)$:

$\varphi_i(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x))=0,\ i\in[1,m],\ m<n$.

Мы будем исследовать вариационную задачу на условный экстремум с голономными связями и закрепленными концами:

$$\Phi(\bar{y})=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\bar{y},\bar{y}')dx,\ y=\{y_1,...,y_n\}$$

при дополнительных условиях

$$\begin{gathered}\varphi_i(x,\bar{y})=0,\ i\in[1,m],\ m<n,\\ \bar{y}(x_0)=\bar{y}^0,\bar{y}(x_1)=\bar{y}^1,\varphi_i(x_0,\bar{y}^0)=0,\varphi_i(x_1,\bar{y}^1)=0.\end{gathered}\tag{45.1}$$

Последние равенства в (45.1) требуют, чтобы условия выполнялись в концевых точках.

Естественно, условия $\varphi_i(x,\bar{y}(x))=0,\ i\in[1,m],\ m<n$ должны быть независимыми. Так как переменных $y_k,\ k\in[1,n]$ больше, чем условий (*n*>*m*), то мы должны определить,по каким переменным функции φ_i независимы. Без ограничения общности мы можем считать, что условия $\varphi_i(x,\bar{y}(x))$ независимы как функции от первых m переменных $y_1,y_2,...,y_m$. Это означает, что соответствующий якобиан отличен от нуля:

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,...\varphi_m)}{D(y_1,y_2,...y_m)}\neq 0\,.\tag{45.2}$$

Нам необходимо вывести уравнения Эйлера, которым должна удовлетворять экстремаль нашей задачи. Однако использовать стандартный подход к выводу уравнений Эйлера мы не можем, т.к. вариации $(\delta y_1,...,\delta y_n)$ не являются в данном случае независимыми. Они связаны условиями задачи $\varphi_i(x,\bar{y})=0,\ i\in[1,m]$. Необходим специальный подход, позволяющий перейти от задачи на условный экстремум для функционала $\Phi[\bar{y}]$ к задаче на безусловный экстремум для некоторого специально построенного функционала. На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Т е о р е м а **45.1. Вектор-функция, реализующая условный экстремум (45.1), удовлетворяет при соответствующем выборе множителей** $\lambda_i(x),\ (i=1,...,m)$ **уравнени**ям **Эйлера, составленным для функционала**

$$\tilde{\Phi}(\bar{y})=\int_{x_0}^{x_1}(F(x,\bar{y},\bar{y}')+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\varphi_i(x,y))dx.$$

Функции $\lambda_i(x),\, i\in[1,m]$ **и** $\bar{y}(x)$ **определяются из уравнений Эйлера**

$$\left[\begin{array}{l} \tilde{F}_{y_k} - \dfrac{d}{dx}(\tilde{F}_{y'_k}) = 0,\ k \in [1,n], \\ \varphi_i(x,\overline{y}) = 0,\ i \in [1,m], \end{array}\right. \tag{45.3}$$

где

$$\tilde{F}(\overline{x},\overline{y},\overline{y}') = F(\overline{x},\overline{y},\overline{y}') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i(x,y). \tag{45.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.
Вычислим вариацию функционала задачи (45.1) и приравняем ее к нулю:

$$\delta\Phi[\overline{y}] = \frac{\partial}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} \int_{x_0}^{x_1} F(x,\overline{y}+\alpha\delta\overline{y},\overline{y}'+\alpha\delta\overline{y}')dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F(x,\overline{y},\overline{y}')}{\partial y_k}\delta y_i + \frac{\partial F(x,\overline{y},\overline{y}')}{\partial y'_k}\delta y'_k \right) dx = \tag{45.5}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F(x,\overline{y},\overline{y}')}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F(x,\overline{y},\overline{y}')}{\partial y'_k}\Big) \right) \delta y_k(x)dx = 0.$$

К полученному выражению (45.5) применять основную лемму вариационного исчисления нельзя, так как δy_k не являются независимыми функциями, и мы не имеем права выбирать их произвольно.

Исследуем, как связаны вариации функций $\delta y_k, k \in [1,n]$. Для этого разложим условия $\varphi_i(x,\overline{y}) = 0$ в ряд по δy_k, ограничиваясь первым членом ряда Тейлора, что возможно, т.к. $|\delta y_k| \ll 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\varphi_i(x,\overline{y})}{\partial y_k}\delta y_k = 0,\ i \in [1,m]. \tag{45.6}$$

Запишем выражение (45.6) в виде

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\varphi_i(x,\bar{y})}{\partial y_k}\delta y_k=-\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\partial\varphi_i(x,\bar{y})}{\partial y_k}\delta y_k, i\in[1,m]$$

Это неоднородная линейная алгебраическая система уравнений для $\delta y_k, k\in[1,m]$, в правую часть которой входят $\delta y_k, k\in[m+1,n]$.

Согласно условию (45.2), определитель полученной системы

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial y_1}\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial y_2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_m} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_m} & \dots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}=\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\dots\varphi_m)}{D(y_1,y_2,\dots y_m)}\neq 0.$$

Следовательно, полученная система имеет решение, и мы можем выразить $\delta y_k, k\in[1,m]$ через $\delta y_k, k\in[m+1,n]$.

Таким образом, независимыми являются только

$$\delta y_k, k\in[m+1,n].$$

Проведем следующее преобразование: умножим выражение (45.6) на некоторые неопределенные коэффициенты $\lambda_i(x),\ i\in[1,m]$ и просуммируем по *i*.

Тогда получим

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k}\delta y_k=\sum_{k=1}^{n}\delta y_k\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k}=0.$$

Проинтегрировав полученное выражение, найдем

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \sum_{k=1}^{n} \delta y_k (\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}) dx = 0 \qquad (45.7)$$

или

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_k} (\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \varphi_i(x, \overline{y})) \delta y_k dx = 0. \qquad (45.8)$$

Сложив (45.5) с (45.7), получим

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'_k}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \right] \delta y_k dx = 0. \qquad (45.9)$$

Заметим, что можно выбрать $\lambda_i(x)$ такими, чтобы выполнялись условия

$$\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'_k}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} = 0, \; k \in [1, m]. \qquad (45.10)$$

Это следует из того, что (45.10) является системой алгебраических уравнений для $\lambda_i(x), i \in [1, m]$ с определителем неравным нулю, согласно условию (45.2).

Следовательно, в выражении (45.9), во внутренней сумме остается суммирование только от m+1 до n и мы получаем

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \sum_{k=m+1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'_k}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \right] \delta y_k dx = 0.$$

В полученном выражении все $\delta y_k, k \in [m+1, n]$, как было показано выше, являются произвольными непрерывными функциями. Следовательно, на основе основной лемме вариационного исчисления, мы имеем право утверждать, что выполняются уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_k'}\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} = 0,\ k \in [m+1, n]. \quad (45.11)$$

Учитывая (45.10), мы можем утверждать, что система уравнений (45.11) выполняется при всех $k \in [1, n]$.

В результате мы получаем следующую задачу для определения экстремали в задаче на условный экстремум:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y_k}\left(F(x, \overline{y}, \overline{y}') + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i(x, \overline{y})\right) - \\ \qquad\qquad - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F(x, \overline{y}, \overline{y}')}{\partial y_k'}\right) = 0,\ k \in [1, n] \\ \varphi_i(x, \overline{y}) = 0,\ i \in [1, m], \\ \overline{y}(x_0) = \overline{y}^0,\ \overline{y}(x_1) = \overline{y}^1. \end{cases} \quad (45.12)$$

Если ввести функцию

$$\tilde{F}(x, \overline{y}, \overline{y}') = F(x, \overline{y}, \overline{y}') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i(x, \overline{y}), \quad (45.13)$$

то, учитывая, что φ_i не зависят от $\overline{y}'$, уравнение (45.12) можно записать в более компактном виде

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y'_k}\right) = 0, \qquad (45.14)$$

что и требовалось доказать

§46.Задачи на условный экстремум при неголономных связях.

Вариационная задача на условный экстремум при неголономных связях ставится следующим образом.

Найти экстремум функционала

$$\begin{cases} \Phi(\bar{y}) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))dx \\ \text{при дополнительных условиях, связывающих} \\ \text{вектор-функцию } \bar{y}(x) \text{ и ее производную } \bar{y}'(x) \\ \varphi_i(x, \bar{y}, y') = 0,\ i \in [1, m],\ m < n \\ \text{и закрепленных концах функции} \\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}^0,\ \bar{y}(x_1) = \bar{y}^1. \end{cases} \qquad (46.1)$$

Мы будем считать, что функции связи $\varphi_i(x,\bar{y},\bar{y}')$, $i\in[1,m]$ независимы по переменным $y_1',y_2',\ldots,y_m'$, т.е. не равен нулю якобиан

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_m)}{D(y_1',y_2',\ldots y_m')}\neq 0\,. \qquad (46.2)$$

Это означает, что из уравнений связи можно определить первые m производных

$$\begin{cases} y_i'(x)=f_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_m,y_{m+1}',\ldots,y_n'),\ i\in[1,m],\\ \bar{y}(x_0)=\bar{y}^0,\ \bar{y}(x_1)=\bar{y}^1. \end{cases} \qquad (46.3)$$

Если известны функции $y_{m+1}'(x),\ldots,y_n'(x)$, удовлетворяющие граничным условиям

$$y_k(x_0)=y_k^0,\ y_k(x_1)=y_k^1,\ \ k\in[m+1,n],$$

то (46.3) представляет собой краевую задачу для системы дифференциальных уравнений. Из этой системы могут быть определены функции $(y_1(x),\ldots,y_m(x))$ при произвольно заданных $(y_{m+1}(x),\ldots,y_n(x))$, т.е. независимыми являются функции $(y_{m+1}(x),\ldots,y_n(x))$.

Вычислив вариацию функционала задачи (46.1), согласно (45.5), получим необходимое условие экстремума

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F(x,\bar{y},\bar{y}')}{\partial y_k}-\frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F(x,\bar{y},\bar{y}')}{\partial y_k'}\Big)\right)\delta y_k(x)dx=0\,,(46.4)$$

в котором только $(\delta y_{m+1},...,\delta y_n)$ являются независимыми вариациями вектор -функции $\overline{y}(x)$. Варьируя уравнения связи $\varphi_i(x,\overline{y},\overline{y}'),\ i\in[1,m]$, получим

$$\sum_{k=1}^{n}(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k}\delta y_k+\frac{\partial\varphi_i}{\partial y'_k}\delta y'_k)=0,\ i\in[1,m] \qquad (46.5)$$

Умножив (46.5) на неизвестные множители Лагранжа λ_i и просуммировав по i, получим

$$\sum_{k=1}^{n}\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k}\delta y_k+\frac{\partial\varphi_i}{\partial y'_k}\delta y'_k)=0. \qquad (46.6)$$

Возьмем от выражения (46.6) интеграл в пределах от x_0 до x_1 и проинтегрируем второй член суммы по частям, учитывая, что $\delta y_k(x_0)=\delta y_k(x_1)=0,\ \ k\in[1,n]$.

В результате получим

$$\int_{x_0}^{x_1}\sum_{k=1}^{n}\ \sum_{i=1}^{m}(\lambda_i(x)\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k}\delta y_k+\lambda_i(x)\frac{\partial\varphi_i}{\partial y'_k}\delta y'_k)dx=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\sum_{k=1}^{n}\ \sum_{i=1}^{m}(\lambda_i(x)\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k}-\frac{d}{dx}(\lambda_i(x)\frac{\partial\varphi_i}{\partial y'_k}))\delta y_k dx=0 \qquad (46.7)$$

Если (46.7) сложить с (46.4), получим необходимое условие экстремума функционала в виде

$$\int_{x_0}^{x_1}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial y_k}F(x,\bar{y},\bar{y}')+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\varphi_i(x,\bar{y},\bar{y}'))-\right.$$

$$\left.-\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y_k'}(F(x,\bar{y},\bar{y}')+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\varphi_i(x,\bar{y},\bar{y}'))\right]\delta y_k(x)dx=0$$

Если ввести обозначение, аналогично (45.13)

$$\tilde{F}(x,\bar{y},\bar{y}')=F(x,\bar{y},\bar{y}')+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\varphi_i(x,\bar{y},\bar{y}'), \qquad (46.8)$$ мы

можем записать необходимое условие экстремума в компактном виде

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\tilde{F}}{\partial y_k}-\frac{d}{dx}\bullet\frac{\partial\tilde{F}}{\partial y_k'}\right)\delta y_k(x)dx=0. \qquad (46.9)$$

В этом выражении только δy_k , $k\in[m+1,n]$являются независимыми произвольными непрерывными функциями с закрепленными концами

$$\delta y_k(x_0)=\delta y_k(x_1)=0.$$

Оказывается, можно подобрать множители Лагранжа $\lambda_i(x),\, i\in[1,m]$ так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial y_k}-\frac{d}{dx}\bullet\frac{\partial\tilde{F}}{\partial y_k'}=0 \text{ при } k\in[1,m] \qquad (46.10)$$

Это утверждение принимаем без доказательств.

Выполнение условий (46.10) дает возможность записать (46.9) в виде

$$\int_{x_0}^{x_1}\sum_{k=m+1}^{n}\left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial y_k}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial y'_k})\right)\delta y_k(x)dx=0, \qquad (46.11)$$

где $\delta y_k(x),\ k\in[m+1,n]$ являются произвольными непрерывными функциями с закрепленными концами. Следовательно, к (46.11) можно применить основную лемму вариационного исчисления и получить уравнения Эйлера

$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial y_k}-\frac{d}{dx}\bullet\frac{\partial\tilde{F}}{\partial y'_k}=0,\ k\in[m+1,n] \qquad (46.12)$$

Выражения (46.10) и (46.12) показывают, что соответствующие уравнения Эйлера выполняются для всех $k\in[1,n]$.

В результате получаем для экстремали $\overline{y}$ и коэффициентов Лагранжа $\lambda_i(x),\ i\in[1,m]$ систему из (m+n) уравнений, состоящую из n уравнений Эйлера и m условий связи

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial y_k}-\dfrac{d}{dx}\bullet\dfrac{\partial}{\partial y'_k}\right)\left(F(x,\overline{y},\overline{y}')+\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\varphi_i(x,\overline{y},\overline{y}')\right)=0,\ k\in[1,n]\\ \varphi_i(x,\overline{y})=0,\ i\in[1,m],\\ \overline{y}(x_0)=\overline{y}^0,\ \overline{y}(x_1)=\overline{y}^1,\ x\in[x_0,x_1].\end{cases}$$

§47. Изопериметрические вариационные задачи.

Изопериметрические задачи являются частным случаем задач на условный экстремум при неголономных связях. Они возникли в задачах об определении геометрической фигуры, имеющей максимальную площадь при заданном периметре. В настоящее время изопериметрические задачи понимаются в более широком смысле как задачи на условный экстремум функционала

$$\Phi(\bar{y}) = \int_{x_0}^{x} F(x, \bar{y}, \bar{y}')dx$$

при дополнительных условиях интегрального типа

$$\int_{x_0}^{x} f_i(x, \bar{y}, \bar{y}')dx = l_i, \quad i \in [1, m], \tag{47.1}$$

в отличие от рассмотренных выше дифференциальных условий. Число условий m не связно с числом искомых функций n.

Изопериметрические задачи легко сводятся к задачам на условный экстремум, рассмотренным в параграфе 26. Для этого введем функции

$$z_i(x) = \int_{x_0}^{x} f_i(x, \bar{y}, \bar{y}')\, dx, \; i \in [1, m] \tag{47.2}$$

у которых $z_i(x_0) = 0,\; z_i(x_1) = l_i$.

Продифференцировав (47.2), получим условия в виде

$$\varphi_i(x,\bar{y},\bar{y}') = f_i(x,\bar{y},\bar{y}') - z_i'(x) = 0,\ i \in [1,m]. \qquad (47.3)$$

Таким образом, задача свелась к задаче (46.1), рассмотренной в параграфе 46, в которой ищутся функции $\bar{y}(x) = (y_1,...,y_n)$ и $\bar{z}(x) = (z_1,...,z_m)$.

Как было показано в параграфе 46, полученная задача с помощью функций Лагранжа сводится к задаче на безусловный экстремум для функционала

$$\tilde{\Phi}(\bar{y},\bar{z}) = \int_{x_0}^{x} \tilde{F}(x,\bar{y},\bar{y}',\bar{z},\bar{z}')\,dx \qquad (47.4)$$

где

$$\tilde{F} = F(x,\bar{y},\bar{y}') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)(f_i(x,\bar{y},\bar{y}') - z_i'(x)) \qquad (47.5)$$

Уравнения Эйлера для функционала $\tilde{\Phi}(\bar{y},\bar{z})$ имеют вид

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \bullet \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y_k'} = 0,\ k \in [1,n] \qquad (47.6)$$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial z_i} - \frac{d}{dx} \bullet \frac{\partial \tilde{F}}{\partial z_i'} = 0,\ i \in [1,m] \qquad (47.7)$$

Учитывая, что $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial z_i} = 0$, а $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial z_i'} = \lambda_i(x)$ получим из (47.7)

$$\frac{d\lambda_i}{dx} = 0,\ i \in [1, m]. \qquad (47.8)$$

Из (47.8) получаем, что множители Лагранжа являются константами. Поэтому из (47.6) мы получаем систему уравнений Эйлера для $\bar{y}(x)$ в виде при $x \in [x_0, x_1]$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,\bar{y},\bar{y}'}{\partial y_k} - \dfrac{d}{dx}(\dfrac{\partial F(x,\bar{y},\bar{y}')}{\partial y'_k}) + \\ + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\dfrac{\partial f_i(x,\bar{y},\bar{y}')}{\partial y_k} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f_i(x,\bar{y},\bar{y}')}{\partial y'_k} \right) = 0, \\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}^0,\ \bar{y}(x_1) = \bar{y}^1,\ k \in [1,n] \end{cases} \qquad (47.9)$$

Решение краевой задачи (47.9) зависит от постоянных множителей Лагранжа $\lambda_i,\ i \in [1, m]$ как от параметров, которые находятся из условий (47.1). Определив $\{\lambda_i\}$, находим в итоге экстремаль $\bar{y}(x)$.

Если обозначить

$$\tilde{F}(x,\bar{y},\bar{y}') = F(x,\bar{y},\bar{y}') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x,\bar{y},\bar{y}'), \text{ где } \lambda_i = const,$$

то изопериметрическая вариационная задача сводится к решению системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial y_k} - \dfrac{d}{dx} \bullet \dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial y'_k} = 0,\ k \in [1,n],\ x \in [x_0, x_1] \\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}^0,\ \bar{y}(x_1) = \bar{y}^1. \end{cases} \qquad (47.10)$$

а постоянные λ_i определяются из условий

$$\int_{x}^{x_1} f(x,\bar{y},\bar{y}')dx = l_i, \quad i \in [1,m] \qquad (47.11)$$

Рассмотрим в качестве примера задачу: найти экстремаль изопериметрической задачи

$$\tilde{\Phi}(y) = \int_0^1 y'^2\, dx, \;\; y(0) = y(1) = 0$$

при дополнительном условии

$$\int_0^1 y(x)\, dx = l\,.$$

Для данной задачи имеем

$$\tilde{F}(y, y') = y'^2(x) + \lambda y(x)\,.$$

Тогда, согласно (47.10), получим краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial y} - \dfrac{d}{dx} \bullet \dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial y'} = \lambda - 2y''(x) = 0, \; x \in [0,1] \\ y(x=0) = y(x=1) = 0. \end{cases}$$

Из уравнения находим

$$y(x) = \frac{\lambda}{4} x^2 + c_1 x + c_2\,.$$

Из граничных условий получаем $c_2 = 0,\; c_1 = -\dfrac{\lambda}{4}$.

Откуда экстремаль равна:

$$y(x) = -\frac{\lambda}{4}x(1-x).$$

Множитель Лагранжа находится из интегрального условия:

$$\int_0^1 y(x)\,dx = -\frac{\lambda}{24} = l\text{, т.е. } \lambda = -24l.$$

Окончательно, получаем экстремаль

$$y(x) = 6l\,x(1-x).$$

Подставив выражение для $y(x)$ в функционал, найдем экстремум функционала

$$\Phi(y) = 36l^2\int_0^1 (1-2x)\ \ dx = 12l^2$$

§48. Многомерные вариационные задачи. Уравнение Эйлера-Остроградского.

Ранее мы рассматривали вариационные задачи для функций, зависящих от одной переменной. В результате для экстремали получались уравнения Эйлера в виде обыкновенных дифференциальных уравнений. Если функционал определен на множестве функций многих переменных, то уравнениями Эйлера в этом случае будут уравнения в частных производных, которые рассматриваются в курсе «Уравнения математической физики».

В нашем курсе мы рассмотрим простейший случай функционала от функции двух переменных $z(x,y)$, чтобы показать, как получаются уравнения Эйлера в этом случае. Для компактности записи формул введем обозначения $\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x} = p,\ \dfrac{\partial z(x,y)}{\partial y} = q$. Тогда простейший функционал от функции двух переменных будет иметь вид

$$\Phi(z(x,y)) = \iint_S F(x,y,z,p,q)dxdy,\ (x,y)\in S \qquad (48.1)$$

Будем рассматривать задачу с закрепленной границей, когда все допустимые поверхности $z = z(x,y)$ проходят через контур C', проекцией которого на плоскость *XOY* является контур *C*. Таким образом, граничным условием является равенство

$$z(x,y)\Big|_{x,y\in C} = z_0(x,y) \qquad (48.2)$$

Вариация функции $\delta z(x,y)$ вводится как разность функций

$$\delta z(x,y) = z(x,y) - z_1(x,y), \qquad (48.3)$$

причем

$$\delta z(x,y)\Big|_C = 0. \qquad (48.4)$$

Вариация функционала $\delta\Phi$ вводится , так же как в одномерном случае, как главная линейная по δz часть приращения функционала

$$\Delta\Phi(z) = \Phi(z+\delta z) - \Phi(z)$$

и вычисляется по формуле

$$\delta\Phi = \frac{\partial}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0} \iint_S F(x,y,z+\alpha\delta z, p+\alpha\delta p, q+\alpha\delta q)dxdy$$

(48.5)

Необходимым условием экстремума функционала $\Phi(z(x,y))$ является равенство нулю вариации функционала на экстремали $z = z'(x,y)$:

$$\delta\Phi(z(x,y))\Big|_{z=z'(x,y)} = 0, \qquad (48.6)$$

если $z'(x,y)$- внутренняя точка области определения функционала.

В двумерном случае также выполняется **основная лемма вариационного исчисления.**

Если для каждой непрерывной в области S функции $\eta(x,y)$, $\eta\Big|_{(x,y)\in C} = 0$, где C- контур, ограничивающий область S выполняется условие

$$\iint_S f(x,y)\bullet\eta(x,y)dxdy = 0, \qquad (48.7)$$

где $f(x,y)$ -непрерывная в S функция, то

$$f(x,y) = 0 \text{ при } (x,y)\in S. \qquad (48.9)$$

Доказательство аналогично одномерному случаю. Если в некоторой точке $(x_0, y_0)\in S$ функция $f(x_0,y_0)\neq 0$, то в ее окрестности S_0 функция будет иметь постоянный знак. Выберем функцию $\eta(x,y)$ так, чтобы $\eta(x,y)=0$ при $(x,y)\notin S_0$ и $\eta(x,y)\geq 0$ при $(x,y)\in S_0$. Тогда

$$\iint_S f(x,y)\bullet\eta(x,y)dxdy = \iint_{S_0} f(x,y)\bullet\eta(x,y)dxdy \neq 0.$$

Пришли в противоречие с условием (48.7).Следовательно, выполняется условие (48.8). Основная лемма позволит нам вывести уравнения Эйлера в двумерном случае.

Вначале вычислим вариацию функционала (48.5):

$$\delta\Phi(z(x,y)) = \iint_S \left(\frac{\partial F}{\partial z}\delta z + \frac{\partial F}{\partial p}\delta p + \frac{\partial F}{\partial q}\delta q \right) dxdy\,. \quad (48.9)$$

Нам необходимо преобразовать (48.9) так, чтобы вместо $\delta p = \dfrac{\partial \delta z}{\partial x}$ и $\delta q = \dfrac{\partial \delta z}{\partial y}$ в интеграле бы появилась δz.

Для этого воспользуемся тождествами

$$\frac{\partial}{\partial x}(F_p\delta z) = \frac{\partial F_p}{\partial x}\delta z + F_p\delta p$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(F_q\delta z) = \frac{\partial F_q}{\partial y}\delta z + F_q\delta q \quad (48.10)$$

Подставив (48.10) в (48.9), получим

$$\delta\Phi = \iint_S \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y} \right)\delta z dxdy + $$
$$+ \iint_S \left(\frac{\partial}{\partial x}(F_p\delta z) + \frac{\partial}{\partial y}(F_q\delta z) \right) dxdy. \quad (48.11)$$

Легко показать, что второй интеграл в (48.11) равен нулю. Для этого преобразуем его, используя формулу Остроградского:

$$\iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy = \oint_C Ndy - Mdx \;\; .$$

Тогда получим

$$\iint_S \left(\frac{\partial}{\partial x}(F_p \delta z) + \frac{\partial}{\partial y}(F_q \delta z) \right) dxdy =$$
$$= \oint_C F_p \delta z dy - F_q \delta z dx = 0 \qquad (48.12)$$

Равенство нулю получается, т.к., согласно (48.4), вариация функции δz равна нулю на контуре *C*. Учитывая (48.12), получим вариацию функционала, которую приравняем нулю:

$$\delta\Phi = \iint_S \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y} \right) \delta z dxdy = 0. \qquad (48.13)$$

Так как δz - произвольная непрерывная функция, то, по основной лемме, получим уравнение Эйлера-Остроградского

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y} = 0. \qquad (48.14)$$

Для примера рассмотрим функционал вида

$$\Phi(z(x,y)) = \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right\} dxdy \qquad (48.15)$$

Таким образом, мы имеем

$$F = p^2 + q^2.$$

Подставив в (48.14), получим в качестве уравнения Эйлера-Остроградского

$$\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0. \qquad (48.16)$$

Это известное уравнение Лапласа в двумерном случае.

Задачи к VIII главе.

1. Найти экстремум следующих функционалов.

1.1. $\Phi(y(x))=\int\limits_0^{\pi/2}(y'^2-y^2)\,dx;\ y(0)=0,\ y(\pi/2)=1$

1.2. $\Phi(y(x))=\int\limits_0^{2}y'(1+x^2y')\,dx;\ y(1)=1,\ y(2)=1$

1.3. $\Phi(y(x))=\int\limits_0^{1}(xy'-y'^2)\,dx;\ y(0)=1,\ y(1)=0$

1.4. $\Phi(y(x))=\int\limits_0^{\pi}(y^2-y'^2-2y\sin x)\,dx;\ y(0)=0,\ y(\pi)=1$

2. Найти экстремали функционалов.

2.1. $\Phi(y(x))=\int\limits_0^{\pi/2}(4y^2+x^2-y''^2)\,dx$

2.2. $\Phi(y(x))=\int\limits_0^{1}(2xy+y'''^2)\,dx$

2.3. $\Phi(y(x),z(x))=\int\limits_0^{\pi/2}(2yz-2y^2+y'^2-z'^2)\,dx$

3. Написать уравнение Остроградского-Эйлера для функционалов.

3.1. $$\Phi[u(x,y)] = \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dxdy$$

3.2. $$\Phi[u(x,y)] = \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - k^2(x,y)u^2 \right\} dxdy$$

4. Найти экстремали изопериметрической задачи.

4.1. $$\begin{cases} \Phi(y(x)) = \int_0^1 (y'^2 + x^2)\, dx; \; y(0) = 0, \; y(1) = 1 \\ \int_0^1 y^2\, dx = 2 \end{cases}$$

4.2. $$\begin{cases} \Phi(y(x)) = \int_0^1 y'^2\, dx; \; y(0) = 0, \; y(1) = 0 \\ \int_0^1 y\, dx = l = const > 0 \end{cases}$$

4.3. $$\begin{cases} \Phi(y(x)) = \int_0^1 y(x)\, dx; \; y(0) = 0, \; y(1) = 1 \\ \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2}\, dx = l = const > 0 \end{cases}$$